O-9

単一状態を例にとったサブバキューム効果について
Maximal Subvacuum Effects: A Single Mode Example

○山城寛太[1]，　二瓶武史[2]
*Kanta Yamashiro[1], Takeshi Nihei[2]

Abstract: Expected values of energy density and square field take positive values in classical physics. However, they can be negative in quantum field theory. In the vacuum state, they take a positive value in the classical excited state. Therefore, when the average value of the energy density and the squared electric field becomes negative, they take values lower than those at the time of vacuum. This phenomenon is called "Subvacuum Effects." Here we discuss the Subvacuum effect. As an example, we deal with the non-classical averaged electric field squared. In particular, we will discuss superposition, squeezed vacuum states, and coherent states.

１．はじめに

エネルギー密度や２乗場の期待値は，古典物理学では正の値をとる．しかしながら，場の量子論を用いて議論すると，その値が負になることがあることが分かっている．このように，エネルギー密度や２乗電場の平均値が真空状態よりも低く，負になる現象をSubvacuum 効果と呼ぶことにする[1]．量子論的に考えると真空時の期待値が負になることがあるというのは非常に不思議で興味深い．Subvacuum 効果について理論的に記述することができれば，実験的な観測事実の裏付けとすることができる．

２．Subvacuum 効果

この節では、Subvacuum 効果の概念を具体的な例を用いて説明する．単一モードに対する２乗した電場を例として考えると，電場の演算子は次のように書ける．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=a\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}+a^{\dagger}\boldsymbol{f}^{*}(\boldsymbol{x})e^{i\omega t}$$

ここで，aは消滅演算子，$a^{\dagger}$は生成演算子，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$はモード関数，$\omega$は角周波数である．ノーマルオーダーをとった２乗場は次のようになる．

$$:E(\boldsymbol{x},t)^2:=2|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^2a^{\dagger}a+a^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})e^{-2i\omega t}$$
$$+(a^{\dagger})^2\boldsymbol{f}^{*}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}^{*}(\boldsymbol{x})e^{2i\omega t}$$

ここでは時間平均のみを考える．実の偶関数であるg(t)によって記述され，

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)dt=1$$

により正規化されているとする．ここで，ある空間上の点における２乗電場の時間平均 T は次のようにかける．

$$T\equiv\int_{-\infty}^{\infty}:E^2(\boldsymbol{x},t):g(t)dt$$

$$T=2|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^2a^{\dagger}a$$
$$+\{a^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+(a^{\dagger})^2\boldsymbol{f}^{*}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}^{*}(\boldsymbol{x})\}\hat{g}(2\omega)$$

さらに

$$\hat{g}(\omega)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{i\omega t}\,dt$$

であり，これは g(t)のフーリエ変換である．また

$$T\equiv Aa^{\dagger}a+Ba^2+B^{*}(a^{\dagger})^2$$

とすると

$$A=2|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|2>0,$$
$$B=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\hat{g}(2\omega)$$

となる．

特定の量子状態下で，２乗電場またはエネルギー密度に対する Subvacuum 効果がどのように生じるか考察する。簡単な１つの例は，真空と２粒子状態の重ね合わせである．

$$|\psi\rangle\equiv\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}(|0\rangle+\epsilon|2\rangle)$$

ここで ε は実数である．この状態での T の期待値は次のように計算できる．

$$\langle T\rangle\equiv\langle\psi|T|\psi\rangle$$
$$=\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\{\sqrt{2}(B+B^{*})+2\epsilon A\}$$

このとき

$$a|0\rangle=0,$$
$$[a,a^{\dagger}]=1,$$
$$\langle 0|0\rangle=1$$

などを用いた．ε が

$$|\varepsilon|<\frac{\sqrt{2}|B+B^{*}|}{2A}$$

を満たすとき，この期待値は負になる．つまり，期待

1：日大理工・院（前）・物理　2：日大理工・教員・物理

値が，ε の選び方により負になる場合が実現されるということである．この例では，Subvacuum 効果は異なる粒子数での状態間の量子干渉効果として発生するということがわかる．

Subvacuum 効果に関する別の量子状態ではスクイズド真空状態がある．これは

$$|\zeta\rangle \equiv S(\zeta)|0\rangle$$

によって定義される状態で，

$$S(\zeta) \equiv \exp\left[\frac{1}{2}\{\zeta^* a^2 - \zeta(a^\dagger)^2\}\right]$$

はスクイーズ演算子である．さらに，

$$\zeta \equiv r\mathrm{e}^{i\delta}$$

とおくと

$$S^\dagger a S = a\cosh r - a^\dagger \mathrm{e}^{i\delta}\sinh r$$

が成り立つ．このとき

$$S^{-1} = S^\dagger,$$

$$[B, a] = -\zeta a^\dagger,$$

$$[B, a^\dagger] = -\zeta^* a$$

などを用いた．この式から次の２式が導ける．

$$\langle\zeta|a^2|\zeta\rangle = \langle\zeta|(a^\dagger)^2|\zeta\rangle^* = -\mathrm{e}^{i\delta}\sinh r\cosh r,$$

$$\langle\zeta|a^\dagger a|\zeta\rangle = \sinh^2 r$$

この２式を用いると次式が得られる．

$$\langle\zeta|T|\zeta\rangle = \sinh r[A\sinh r - 2\cosh r\mathrm{Re}(B\mathrm{e}^{i\delta})]$$

さらに δ=0 と $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が実であると仮定すると次式が得られる．

$$\langle :E^2(\boldsymbol{x},t): \rangle \equiv \langle\zeta| :E^2(\boldsymbol{x},t): |\zeta\rangle$$

$$= 2\boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{x})\sinh r[\sinh r - \cosh r\cos(2\omega t)]$$

これは，固定された空間上の点において，時間の周期関数になっている．

$$\cosh r > \sinh r$$

が成り立つので，この期待値は $\mathrm{t} = 0$ の付近で負になることがわかる．

同様にコヒーレント状態についても議論する．消滅演算子aの固有ベクトルを$|\lambda\rangle$とすると

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

が成り立つとき，$|\lambda\rangle$ のことをコヒーレント状態と呼ぶ．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$が実とすると

$$\langle\lambda|T|\lambda\rangle = 2\boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{x})|\lambda|^2$$

$$+\boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-2i\omega t}\lambda^2 + f^2(x)\mathrm{e}^{2i\omega t}(\lambda^2)^*$$

が成り立つ．ここで

$$\lambda \equiv \lambda_0 \mathrm{e}^{i\theta}$$

とおくと

$$\langle\lambda|T|\lambda\rangle = 2\boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{x})\lambda_0 2[1 + \cos\{2(\omega t - \theta)\}$$

が成り立つ．

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

なので

$$\langle\lambda|T|\lambda\rangle \geq 0$$

となる．つまり．この状態の期待値は負にならないことがわかる．

３．対角化の導入

次の形式のボゴリューボフ変換を考える．

$$a \equiv \alpha b + \beta b^\dagger$$

ここでαとβは定数とし，bと$b^\dagger$は同じモードに対する生成・消滅演算子である．交換関係

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$$

は次式を満たす必要がある．

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$$

$a = \alpha b + \beta b^\dagger$ を用いると T は次のようにかける．

$$T = [A(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + 2B\alpha\beta + 2B^*\alpha^*\beta^*]b^\dagger b + [A\alpha\beta^* + B\alpha^2 + B^*(\beta^*)^2]b^2 + [A\alpha^*\beta + B^*(\alpha^*)^2 + B\beta^2](b^\dagger)^2 + [A|\beta|^2 + B\alpha\beta + B^*\alpha^*\beta^*]$$

この式から，対角化の条件を導き出すことができる．

４．まとめと今後の展望

期待値が，真空時の値よりも下がるという Subvacuum 効果を紹介した．重ね合わせの状態やスクイズド真空状態では期待値が負になることを確認できた．一方で，コヒーレント状態では負になることがないことも発見できた．おそらく他にも期待値が負になるような条件が存在すると考えられる．まず，重ね合わせの仕方を変えることでどのようになるか議論することができる．

また「光の伝搬」について，文献[2]を参考に検討することができる．さらに，ボゴリューボフ変換との関連性から超伝導で用いられるBCS理論についても検討の余地がありそうだ．

５．参考文献

[1] A. Korolov and L. H. Ford, “Maximal Subvacuum Effects: A Single Mode Example”, Phys. Rev.D 98, 036020 (2018)

[2] V. A. De Lorenci and L. H. Ford, “Subvacuum effects on light propagation”, Phys. Rev. A 99,023852 (2019)