P-1

数の幾何学における Blichfeldt の補題とその応用

Blichfeldt's lemma in geometry of numbers and applications

○栗島 昂大
Kodai Kurishima[1]

Abstract

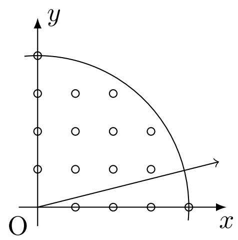
In this article, we introduce Blichfeldt's lemma which provides applications in number theory, following Pólya's observation. We present how the lemma yields Minkowski convex theorem and further developments.

1　導入

数の幾何学とは，幾何学的な方法を用いて数論に関する諸性質について考察する手法の総称である．H. Minkowski によって創成された分野であると言われている．
まず，G. Pólya-G. Szegő の解析学の教科書にある著名な考察を紹介する ([7] Part 8, Chap. 5, Problem 239)．

Definition
$\mathbb{R}^n$ の点に対して，その各座標がすべて有理整数であるものを，格子点と称する．$\mathbb{R}^n$ の格子点全体の集合を整数格子と呼び，$\mathbb{Z}^n$ で表す．

R を正整数，r を正の実数とする．原点を中心とする半径 R の円 Γ を考える．
円 Γ の内部および周上において原点 O を除く全ての格子点を考え，これらの格子点を中心とする半径 r の円を描く．このとき次の性質が成り立つ．



Theorem 1 (Pólya [6])
(1)$r < \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ ならば，原点 O から円 Γ の外部に引いた半直線で，半径 r のどの円とも交わらないものが存在する．
(2)$r > \frac{1}{R}$ ならば，原点 O から円 Γ の外部に引いた半直線は，半径 r の円と必ず交わる．

(1) の証明は初等的な議論によるが，(2) の証明は下記に示す Minkowski の第一凸体定理に負う．まず必要な定義を導入する．

Definition
$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 M に対して

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M,\ 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x} \in M$$

となるとき，M を凸集合という．M が有界な凸集合であるとき，M を凸体であるということにする．
また，$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 M に対して，

$$\mathbf{x} \in M \Rightarrow -\mathbf{x} \in M$$

が成り立つとき，M は原点に関して点対称であるという．

[1]日大理工・院 (前)・数学

まず Minkowski の第一凸体定理を記述する．

Theorem 2 (Minkowski の第一凸体定理 [4])
$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 K を考える．K は原点を含み，原点に関して点対称な凸体であり，面積 $\mu(K)$ をもつものとする．$\mu(K) > 2^n$ ならば K は原点と異なる格子点を必ず含む．

この定理は Minkowski によって証明されたが，C. L. Siegel [9] や L. J. Mordell [5] 等により別証明が与えられている．Minkowski はこの他にも凸体に含まれる格子点に関する，第二凸体定理という定理を示した．
以下，Blichfeldt の補題を用いた第一凸体定理の証明 [8][9] および，Pólya の考察について紹介する．

2　Blichfeldt の補題

Blichfeldt の補題とは以下の主張である．

Lemma 1 (Blichfeldt [2])
$\phi \neq D \subset \mathbb{R}^n$ を，格子点による平行移動で不変な離散集合，つまり $\mathbb{R}^n$ の任意の格子点 $\mathbf{g}$ に対して，$D + \mathbf{g} = D$ を満たすものとし，n 次元単位立方体 U^n との共通部分の元の個数が N 個であると仮定する．R は $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合で，面積 $\mu(R) > 0$ をもつものとする．このとき，ある $\mathbf{x} \in U^n$ が存在して，集合 $R + \mathbf{x}$ が $N \cdot \mu(R)$ 個以上の D の点を含むようにすることができる．R が有界閉集合ならば，ある $\mathbf{x} \in U^n$ が存在して，集合 $R + \mathbf{x}$ が $N \cdot \mu(R)$ 個より多くの D の点を含むようにできる．

ここで，Minkowski の第一凸体定理と Blichfeldt の補題の仮定の違いについて注意する．Minkowski の第一凸体定理では凸集合であるという仮定を要するのに対し，Blichfeldt の補題は凸集合であるという仮定を必要としない．以下において Lemma 1 の証明と，Lemma 1 から導出される Theorem 2 の証明を示す．

Proof of Lemma 1
一般に $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 $\mathfrak{S}$ に対し，$\mathfrak{S}$ の点のうち D に含まれているものの個数を $\nu(\mathfrak{S})$ で表す．仮定より D に含まれる N 個の U^n の点に対し，$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_N$ とおく．$\mathbf{P}_i + \mathbf{g}$($\mathbf{g}$ は格子点) で表される点のうち，$\mathfrak{S}$ に含まれるものの総数を $\nu_i(\mathfrak{S})$ で表す $(1 \leq i \leq n)$．以下の式で右辺の和はすべての格子点をわたるものとする．任意の格子点 $\mathbf{g}$ に対して $D + \mathbf{g} = D$ であるので，

$$\nu(\mathfrak{S}) = \sum_{\mathbf{g}} \nu_i(\mathfrak{S}) \qquad (*)$$

が成立する．$\mathfrak{S} = R + \mathbf{x}$ とし，R の特性関数を用いて

$$\nu_i(R+\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi(\mathbf{P}_i + \mathbf{g} - \mathbf{x})$$

と表す $(1 \leq i \leq N)$．さらに，

$$\begin{aligned}\int_{U^n} \nu_i(R+\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{U^n} \sum_{\mathbf{g}} \chi(\mathbf{P}_i + \mathbf{g} - \mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathbf{g}} \int_{U^n} \chi(\mathbf{P}_i + \mathbf{g} - \mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z} = \int_R \mathrm{d}\mathbf{z} \\ &= \mu(R)\end{aligned}$$

となる．$(*)$ より，

$$\int_{U^n} \nu(R+\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = N \cdot \mu(R)$$

が成り立つ．従って，ある $\mathbf{x} \in U^n$ が存在して $\nu(R+\mathbf{x}) \geq N \cdot \mu(R)$ が成立する．
ただし，$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ に対して $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ と記する．
次に，R が有界閉集合であると仮定する．$N \cdot \mu(R) \notin \mathbb{Z}$ のときは主張が成立するので，$N \cdot \mu(R) \in \mathbb{Z}$ と仮定してよい．$\nu_0 = N \cdot \mu(R)$ とおく．
このとき任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，ある $\mathbf{x}_k \in U^n$ を，

$$\mathfrak{S}_k := \left(1 + \frac{1}{k}\right) R + \mathbf{x}_k, \quad \nu(\mathfrak{S}_k) \geq \nu_0 + 1$$

を満たすようにとれる．また各 $\mathbf{x}_k$ は U^n の閉包 $\overline{U^n}$ に属しており，$\overline{U^n}$ は有界閉集合である．よって Bolzano-Weierstrass の定理より，点列 $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ には収束する部分列 $\{\mathbf{x}_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が存在する．この部分列は $\mathbf{x}_0$ に収束するとする．$\nu(\mathfrak{S}_{k_j}) \geq \nu_0 + 1$ であるので，$\nu_0 + 1$ 個の点 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{\nu_0+1}$ が無限個の $\mathfrak{S}_{k_j}$ に含まれている．R は有界閉集合であるから，この $\nu_0 + 1$ 個の点は $R + \mathbf{x}_0$ に含まれている．従って，

$$\nu(R + \mathbf{x}_0) \geq \nu_0 + 1 > N \cdot \mu(R)$$

が成り立つ．$\mathbf{x}_0 \notin U^n$ のときは，$\mathbf{x}_0$ を格子点によって平行移動したものに変えればよい．

□

この補題を用いた Minkowski の第一凸体定理の証明を述べる．

Proof of Theorem 2
まず，K を $\frac{1}{2}$ 倍に縮小した集合を $\frac{1}{2}K$ と表す．
このとき仮定から $\mu(\frac{1}{2}K) > 1$ である．$R = \frac{1}{2}K$, $N = 1$ に対し $N \cdot \mu(R) > 1$ より整数格子 $D = \mathbb{Z}^n$ に対して Lemma 1 を適用すると，$\frac{1}{2}K + \mathbf{x}$ が 2 つの異なる格子点をもつような $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ が存在する．その 2 つの格子点を $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ とおく．$\mathbf{g}_1 - \mathbf{x}, \mathbf{g}_2 - \mathbf{x} \in \frac{1}{2}K$ となり，$\frac{1}{2}K$ は原点に関して対称であるから $\mathbf{x} - \mathbf{g}_2 \in \frac{1}{2}K$ がいえる．
ここで，ある $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ に対して

$$\mathbf{g}_1 - \mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1, \qquad \mathbf{x} - \mathbf{g}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{x}_2$$

と表す．すると

$$\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2$$

となる．K は凸集合であるので，$\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2$，つまり格子点 $\mathbf{g} := \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$ が K に存在する．

□

Pólya はこの Minkowski の第一凸体定理を用いて Theorem 1 の主張 (2) の証明を行った．

また，Theorem 1 において Pólya は円 Γ の半径 R を正整数と仮定していた．しかし T. T. Allen [1] や C. P. Kruskal [3] 等によって，円 Γ の半径 R が正整数とは限らない場合においても，r の評価を与える不等式に関して以下のように考察された．

R を正の実数とするとき，原点 O から円 Γ の外部へ引いた半直線が半径 r の円と必ず交わるときの r の下限を改めて r と書くと

$$\frac{1}{R+1} < r < \frac{1}{R}$$

が成立する．

References

[1] T. T. Allen, *Pólya's orchard problem*, Amer. Math. Monthly, **93**, 2, (1986), 98–104.

[2] H. F. Blichfeldt, *A new principle in the geometry of numbers, with some applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **15**, (1914), 227–235.

[3] S. P. Kruskal, *The orchard visibility problem and some variants*, J. Comput. System Sci., **74**, (2008), 587–597.

[4] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896, Chelsea Publishing Company.

[5] L. J. Mordell, *On arithmetical results in the geometry of numbers*, Compositio Math., **1**, (1935), 248–253.

[6] G. Pólya, *Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde*, Arch. Math. Phys. Ser., **2**, 27, (1918), 135–142.

[7] G. Pólya & G. Szegő, *Problems and Theorems in Analysis*, II, 1976 (originally published as Grundlehren Math. Wiss. **216**), Springer.

[8] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Mathematics, **785**, (1980), Springer.

[9] C. L. Siegel, *Lectures on the Geometry of Numbers*, 1989, Springer.