

P-10

非凸なポテンシャルを持つギンズブルグ-ランダウ $\nabla\phi$ 界面モデルに対する 流体力学極限

Hydrodynamic limit for the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model with non-convex potential

○西川 貴雄¹, Jean-Dominique Deuschel², Yvon Vignaud³

Takao Nishikawa, Jean-Dominique Deuschel, Yvon Vignaud

Abstract: We establish the hydrodynamic limit for the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model with non-convex potential, especially in the sufficiently high temperature regime discussed in Cotar and Deuschel (2012).

二相を分離する界面そのものを微視的对象物、つまり秩序変数とした界面のモデルは実効的界面モデルと呼ばれ、その一つが今回の講演における対象である「 $\nabla\phi$ 界面モデル」である。 \mathbb{Z}^d 上のスカラー場 ϕ は \mathbb{R}^{d+1} 内に埋め込まれた離散的な超曲面 $\{(x, \phi(x)) \in \mathbb{R}^{d+1}; x \in \mathbb{Z}^d\}$ を定義する。あるいは、適当な補間することにより得られる連続超曲面と同一視して考えてもよい。言い換えれば、 $\phi(x)$ は格子点 x における超曲面の高さ (height) を与える変数である。物理的には、2つの相を分離する界面 (interface) を定めるものと解釈できる。超曲面 ϕ のもつエネルギーを与えるハミルトニアン $H(\phi)$ として

$$H(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^d, |x-y|=1} V(\phi(x) - \phi(y)), \quad V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

を採用したモデルを $\nabla\phi$ 界面モデルと呼ぶ。このハミルトニアン $H(\phi)$ に対応する Langevin 方程式を考え、それを微視的系と見なしたときの巨視的方程式の導出 (標語的に「流体力学極限」と呼ばれる) については既に [5] (周期境界条件下)、[6] (Dirichlet 境界条件下) により得られている。

ここまでの結果では、ハミルトニアン (1) を定義する関数 V は対称な C^2 級関数であり、ある定数 $c_-, c_+ > 0$ が存在して

$$c_- \leq V''(x) \leq c_+, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

が成り立つことを仮定している。この仮定の下、 c_+ の存在は V の増大度は2次であること、また c_- の存在は V の狭義凸性を意味しており、[5] をはじめとした先行結果はこの仮定に強く依存している。この仮定 (2) はどこまで本質的なものであるのか、どの程度の関数 V に対して解析が可能かどうかについて興味がある。

ハミルトニアンを定める関数 V に対する仮定 (2) を外した場合の系の解析は徐々にではあるが進められてきている。 V の2次増大性を仮定し、 V の狭義凸性を仮定しない場合については、凸関数からの摂動が小さい場合には [2], [3] による結果があり、また摂動が大きい場合については [1] の結果がある。本講演では、前者で挙げた、凸関数からの摂動が小さい場合にさらなる考察を行い得られた結果を報告する。詳細な仮定については煩雑なため省略するが、例えば [2] と同じ条件、つまり定数 $\beta > 0$ および対称な関数 $V_0, W \in C^2(\mathbb{R})$ を用いてポテンシャル V が

$$V(x) = \beta(V_0(x) + W(x))$$

と表されており、 V_0 は (2) をみたし、 $W'' \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ ($q \geq 1$) であり、かつ β は十分小さい場合であれば主張は成り立つ。

今回は系に Dirichlet 境界条件を課した [6] に相当する場合について考える。 D をなめらかな境界を持つ凸領域とし、自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対し D に対応する離散的領域を $D_N = \{x \in \mathbb{Z}^d; B(x/N, 5/N) \subset D\}$ により定める。なお、 $B(\alpha, l)$ は中心 α で一辺の長さが l の hypercube である。この領域上で Dirichlet 境界条件付きの

1: 日大理工・教員・数学 2: Technische Universität Berlin 3: Lycée Jean Jaurès

時間発展を次の確率微分方程式の系により導入する:

$$\begin{cases} d\phi_t(x) = -\frac{\partial H}{\partial \phi(x)}(\phi_t) dt + \sqrt{2}dw_t(x), & x \in D_N, \\ \phi_t(x) = \psi^N(x), & x \in \mathbb{Z}^d \setminus D_N. \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $\{w_t(x); x \in \mathbb{Z}^d\}$ は独立な標準ブラウン運動の族である。また、 ψ^N はある $g \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ を用いて

$$\psi^N(x) = N^{d+1} \int_{B(x/N, 1/N)} g(\theta) d\theta$$

により与えられる高さ関数とする。この系を微視的な系として採用し、微視的スケールから巨視的スケールへのスケール変換を、空間について N^{-1} 倍、時間について N^2 倍した

$$h^N(t, x/N) = N^{-1}\phi_{N^2t}(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d$$

により導入する。このとき、 $N \rightarrow \infty$ の極限について次の結果が得られた:

定理 1 ([4]). (3) の初期条件の列 $\phi_0 = \phi_0^N$ に対し、ある $h_0 \in C^2(D)$ が存在して $\text{supp}(h_0 - g) \subset D$ かつ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \|h^N(0) - h_0\|_{L^2(D)}^2 = 0$$

を満たすと仮定する。このとき、任意の $t > 0$ に対し、 $h^N(t)$ は $N \rightarrow \infty$ のとき非線形偏微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h(t, \theta) = \text{div} \left\{ (\nabla \sigma)(\nabla h(t, \theta)) \right\}, & \theta \in D, t > 0, \\ h(t, \theta) = g(\theta), & \theta \in D^c, t > 0, \\ h(0) = h_0 \end{cases} \quad (4)$$

の一意的な弱解 $h(t)$ に収束する。つまり、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \|h^N(t) - h(t)\|_{L^2(D)}^2 = 0$$

が成り立つ。ここで、 $\sigma = \sigma(u) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は表面張力 (*surface tension*) と呼ばれる関数であり、(3) に対応する平衡状態から定められる。

参考文献

- [1] M. Biskup and R. Kotecký, *Phase coexistence of gradient Gibbs states*, Probab. Theory Related Fields **139** (2007), no. 1-2, 1–39.
- [2] C. Cotar and J.-D. Deuschel, *Decay of covariances, uniqueness of ergodic component and scaling limit for a class of $\nabla\phi$ systems with non-convex potential*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **48** (2012), no. 3, 819–853.
- [3] C. Cotar, J.-D. Deuschel, and S. Müller, *Strict convexity of the free energy for a class of non-convex gradient models*, Commun. Math. Phys. **286** (2009), 359–376.
- [4] J.-D. Deuschel, T. Nishikawa, and Y. Vignaud, *Hydrodynamic limit for the ginzburg-landau $\nabla\phi$ interface model with nonconvex potential*, Stoch. Proc. Appl. **129** (2019), no. 3, 924–953.
- [5] T. Funaki and H. Spohn, *Motion by mean curvature from the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model*, Commun. Math. Phys. **185** (1997), 1–36.
- [6] T. Nishikawa, *Hydrodynamic limit for the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model with boundary conditions*, Probab. Theory Relat. Fields **127** (2003), 205–227.