P-5

ニュートン多項式と p 進版ワイエルシュトラス準備定理
Newton Polygon and the p-adic Weierstrass Preparation Theorem

○石井直己 [1]
Naoki Ishii

Abstract: We use properties of Newton polygons to derive a p-adic version of Weirstrass Preparation Theorem.

本稿では，$\mathbb{C}_p$ 上での最大値原理や有限体上の有理点の数えあげであるゼータ関数の有理性の証明に使われる Weierstrass 準備定理の p 進版を証明する．

1. p 進絶対値，ord_p について

定義 1. 素数 p と $a \in \mathbb{Q}^*$ に対し，

$$|a|_p = 1/p^n \quad (a = \pm\frac{b_1}{b_2}p^n, b_1, b_2 \in \mathbb{N}\setminus p\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z})$$

と定義し，$|0|_p = 0$，$\mathrm{ord}_p a = -\log_p(|a|_p)$ とする．$|\cdot|_p$ を p 進絶対値といい，$\mathbb{Q}$ 上の距離になる．$|\cdot|_p$ は強三角不等式

$$|x+y|_p \le \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

をみたす．$|x|_p \neq |y|_p$ のとき等号が成立することも示せる．

$\mathbb{Q}$ を $|\cdot|_p$ で完備化したものを $\mathbb{Q}_p$ とし，$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包を $\mathbb{C}_p$ とする．このとき，$\mathbb{C}_p$ は代数的閉体であり，$|\cdot|_p$ を $\mathbb{C}_p$ まで一意に延長できる．また，距離 $|\cdot|_p$ でベキ級数 $\Sigma_{i=0}^{\infty} a_i$ が収束する必要十分条件は，$|a_i|_p \to 0 (i \to \infty)$ である．以下，$D(r)$ を半径 r の閉円盤とする．

2. Newton polygon と主定理

定義 2. $f(X) = 1 + \Sigma_{i=1}^{\infty} a_i X^i \in 1 + X\mathbb{C}_p[[X]]$ とする．$f(X)$ の ***Newton polygon***（以下 *NP*）とは，

$$\{(i, \mathrm{ord}_p a_i) : i = 0, 1, 2, \cdots\}$$

の凸閉包である．ただし，$f(X)$ が n 次多項式のときは $i = n$ までの点の凸閉包とする．

補題 3. $f(X) = (1 - X/\alpha_1)(1 - X/\alpha_2)\cdots(1 - X/\alpha_n)$ とし，$\lambda_i = \mathrm{ord}_p 1/\alpha_i$ とする．このとき，もし $f(X)$ の *NP* が傾き λ の線分をもち，その横の長さが l なら，l 個の λ_i が λ に等しくなる．

Proof. α_i を並べ替えた $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ に対し，$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots\lambda_r < \lambda_{r+1} \le \cdots \le \lambda_n$ とする．このとき，$f(X)$ の i 番目 $(i = 1, 2, \cdots, r)$ の係数のオーダーは

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_p a_i &= \mathrm{ord}_p(\tfrac{1}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i} \pm \cdots \pm \tfrac{1}{\alpha_{n-i+1}\alpha_{n-i+2}\cdots\alpha_n}) \\ &\ge \min\{\mathrm{ord}_p\tfrac{1}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i}, \cdots, \mathrm{ord}_p\tfrac{1}{\alpha_{n-i+1}\alpha_{n-i+2}\cdots\alpha_n}\} \\ &= i\mathrm{ord}_p\lambda_1.\end{aligned}$$

特に $i = r$ のとき，2 行目の min の中で $i\mathrm{ord}_p\lambda_1$ になるものは $\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}$ しかなく，他の積には λ_1 より真に大きいものが含まれるから強三角不等式の性質より，2 行目の不等号は等号になる．したがって，$(0, 0)$ と $(r, r\mathrm{ord}_p\lambda_1)$ を結ぶ傾き λ_1 で横の長さが r の線分ができる．同様の作業を繰り返すことで補題が示せる． □

補題 3 をべき級数に拡張するため，次の 3 つの補題を用意する．これらは，強三角不等式を使った絶対値の計算と凸集合の性質から導ける．

補題 4. b を $f(X) = 1 + \Sigma_{i=1}^{\infty} a_i X^i \in 1 + X\mathbb{C}_p[[X]]$ の *NP* の傾きの上限とするとき，$f(X)$ の収束半径は p^b．

補題 5. λ_1 を $f(X) = 1 + \Sigma_{i=1}^{\infty} a_i X^i \in 1 + X\mathbb{C}_p[[X]]$ の *NP* の最初の傾きとし，$c \in \mathbb{C}_p$ を $\mathrm{ord}_p c = \lambda \le \lambda_1$ を満たすとする．さらに，$f(X)$ は $D(p^\lambda)$ で収束するとし，$g(X) = (1 - cX)f(X) \in 1 + X\mathbb{C}_p[[X]]$ とおく．このとき $g(X)$ の *NP* は $(0, 0)$ と $(1,\lambda)$ を結ぶ線分に $f(X)$ の *NP* を繋げたものになる．さらに，もし $f(X)$ の *NP* の最後の傾きが λ_f なら，$f(X)$ が $D(p^{\lambda_f})$ で収束することと $g(X)$ が $D(p^{\lambda_f})$ で収束することは同値である．

補題 6. $f(X) = 1 + \Sigma_{i=1}^{\infty} a_i X^i \in 1 + X\mathbb{C}_p[[X]]$ は $D(r)$ で収束し，$f(\alpha) = 0$ とする．このとき，$g(X) = 1 + \Sigma_{i=1}^{\infty} b_i X^i$ を $f(X)/(1 - X/\alpha)$，つまり $f(X)(1 + \Sigma_{i=1}^{\infty}(X/\alpha)^i)$ とすれば，$g(X)$ は $D(\min\{r, |\alpha|_p\})$ で収束．

まずは 1 つ目の根の存在である：

補題 7. λ_1 を $f(X) = 1 + \Sigma_{i=1}^{\infty} a_i X^i \in 1 + X\mathbb{C}_p[[X]]$ の *NP* の最初の傾きとし，$f(X)$ は $D(p^{\lambda_1})$ で収束し，最初の線上に点 $(i, \mathrm{ord}_p a_i)$ があるとする．このとき，$f(\alpha) = 0$ かつ $\mathrm{ord}_p\alpha = -\lambda_1$ を満たすような α が存在する．

注意. $f(X/\lambda_1)$ の *NP* は，$f(X)$ の *NP* から傾きを全て λ_1 減らしたものなので，$\lambda_1 = 0$ として証明すればよい．このとき全ての i で $\mathrm{ord}_p a_i \ge 0$ となる．$f(X)$ は $D(p^{\lambda_1}) = D(1)$ で収束するので $|a_i|_p \to 0$，つまり $\mathrm{ord}_p a_i \to \infty$．特に，$\mathrm{ord}_p a_i = 0$ は有限個しかない．

1: 日大理工・院 (前)・数学

Proof. $\mathrm{ord}_p a_i = 0$ を満たす最大の i を N とし，$f_n(X) = 1+\Sigma_{i=1}^{n} a_i X^i$ とする．補題3より，$n \geq N$ に対し，$f_n(X)$ は $\mathrm{ord}_p \alpha_{n,\,i} = 0$ となる根を N 個（$1 \leq i \leq N$）もち，残りは $\mathrm{ord}_p 1/\alpha_{n,\,i} > 0$（$N+1 \leq i \leq n$）．このとき，初項を $\alpha_N = \alpha_{N,\,1}$ とおき，α_{n+1} を $\alpha_{n+1,\,i}$ のうち $|\alpha_{n+1,\,i} - \alpha_n|_p$ が最小になるものとする．数列 $\{\alpha_n\}$ がコーシー列で，その収束先が所望の条件を満たす根だと示す．

$$|f_{n+1}(\alpha_n) - f_n(\alpha_n)|_p = |f_{n+1}(\alpha_n)|_p = \prod_{i=1}^{n+1} \left|1 - \tfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1,i}}\right|_p$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \left|1 - \tfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1,i}}\right|_p = \prod_{i=1}^{N} |\alpha_{n+1,i} - \alpha_n|_p \geq |\alpha_{n+1} - \alpha_n|_p{}^N.$$

1つ目の等号は $f_n(\alpha_n) = 0$ から，3つ目は，$N+1 \leq i \leq n+1$ なら $\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1,i}}\right|_p < 1$ なので $\left|1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1,i}}\right|_p = 1$ から，4つ目は $|\alpha_{n+1,i}|_p = 1$（$1 \leq i \leq N$）だから，最後は $\{\alpha_n\}$ の選び方から成り立つ．よって

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n|_p{}^N \leq |f_{n+1}(\alpha_n) - f_n(\alpha_n)|_p = |a_{n+1}\alpha_n{}^{n+1}|_p$$

の右辺は $|a_{n+1}|_p$ だから，$\{\alpha_n\}$ がコーシー列と示せた．そこで α_n の収束先を $\alpha \in \mathbb{C}_p$ とおく．

$$\begin{aligned} |f_n(\alpha)|_p &= |f_n(\alpha) - f_n(\alpha_n)|_p \\ &= |\alpha - \alpha_n|_p \left|\Sigma_{i=1}^{n} a_i \frac{\alpha^i - \alpha_n{}^i}{\alpha - \alpha_n}\right|_p \leq |\alpha - \alpha_n|_p \end{aligned}$$

より，$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha)$ は任意の正数で抑えられ，$f(\alpha) = 0$ である．$\mathrm{ord}_p \alpha_n = 0$ より $\mathrm{ord}_p \alpha = 0$ である．□

定理 8 (p-adic Weierstrass Preparation Theorem)**.** $f(X) = 1 + \Sigma_{i=1}^{\infty} a_i X^i \in 1 + X\mathbb{C}_p[[X]]$ は $D(p^\lambda)$ で収束すると仮定．次のように N をおく：(*1*) $f(X)$ の *NP* の傾きが λ 以下の線分の長さが有限ならその長さを N とおく．(2) $f(X)$ の *NP* の最後の線分の傾きが λ なら，その線分上にある点のうち，原点から一番遠い点 $(i, -\mathrm{ord}_p a_i)$ の i を N とする．このとき，次数 N の $h(X) \in 1 + X\mathbb{C}_p[X]$ と，$D(p^\lambda)$ で収束し $D(p^\lambda)$ に根をもたない $g(X) = 1 + \Sigma_{i=1}^{\infty} b_i X^i$ が存在して $h(X) = f(X)g(X)$ をみたす．また，$h(X)$ の *NP* は $f(X)$ のものと $(N, \mathrm{ord}_p a_N)$ まで一致する．

注意. *NP* の各線分が有限で傾きが限りなく λ に近づいていく場合は定理が使えない．また，(2) で最後の線分が漸近線，あるいは線分上に無限に点が存在するなら $D(p^\lambda)$ で収束することに反するので，N が存在する．$h(X)$ が一意に定まることも示せる．

Proof. N による帰納法．$N = 0$ のとき，$g(X) = 1/f(X)$ とおくと，$g(X)$ が $D(p^\lambda)$ で収束し，根をもたないことを示す．補題7と同様に最初の傾きを0と仮定してよく，$f(X)$ と $g(X)$ の i 番目の係数 a_i, b_i は

$$\mathrm{ord}_p a_i > 0, \mathrm{ord}_p a_i \to \infty (i \to \infty)$$
$$b_i = -(b_{i-1}a_1 + b_{i-2}a_2 + \cdots + b_1 a_{i-1} + a_i)$$

を満たす．これより，$\mathrm{ord}_p b_i > 0$ が従う．$f(X)$ は $D(1)$ で収束するので任意の M に対し m が存在し，全ての $i \geq m$ に対し $\mathrm{ord}_p a_i > M$ となる．$\epsilon = \min\{\mathrm{ord}_p a_1, \cdots, \mathrm{ord}_p a_m\}$ とし，

$$i > mn \Rightarrow \mathrm{ord}_p b_i > \min\{M, n\epsilon\} \qquad (*)$$

を示せれば，$n = M/\epsilon$ とおくと，$\mathrm{ord}_p b_i \to \infty$ が分かり，$g(X)$ の $D(1)$ における収束が言える．$n = 0$ のときの (*) は，$\min\{M, n\epsilon\} = 0$ なので成立．$n-1$ まで (*) が成り立っているとすると，$j \geq m$ のとき，$\mathrm{ord}_p b_{i-j} a_j = \mathrm{ord}_p b_{i-j} + \mathrm{ord}_p a_j \geq \mathrm{ord}_p a_j > M$．一方，$j < m$，つまり $i - j > m(n-1)$ のとき，$\mathrm{ord}_p b_{i-j} + \mathrm{ord}_p a_j \geq \mathrm{ord}_p b_{i-j} + \epsilon > \min\{M, n\epsilon\}$ となる．これで (*) が示せた．

$N-1$ まで定理が成り立つとする．$N \geq 1$ なので，λ 以下の傾きが存在し，その線分上に点 $(i, \mathrm{ord}_p a_i)(i \leq N-1)$ が存在する．$\lambda_1 \leq \lambda$ を $f(X)$ の NP の最初の傾きとする．補題7より $f(\alpha) = 0$，$\mathrm{ord}_p \alpha = -\lambda_1$ をみたす $\alpha \in \mathbb{C}_p$ が存在する．そこで $f_1(X)$ を次のように定義する．

$$f_1(X) = f(X)(1 + \tfrac{X}{\alpha} + (\tfrac{X}{\alpha})^2 + \cdots) = 1 + \Sigma_{i=1}^{\infty} a_i{}' X^i$$

$c = 1/\alpha$ とおけば，$f(X) = (1 - cX)f_1(X)$ である．f_1(X) の NP の最初の傾きを $\lambda_1{}'$ とする．もし $\lambda_1{}'$ が λ_1 より小さいなら，係数の絶対値より最初の傾きの設定に矛盾．よって，$\lambda_1 \leq \lambda_1{}'$ である．ここで，$f_1(X)$，$f(X)$，$\lambda_1{}'$，λ_1 に対して補題5を用いると，$f_1(X)$ の NP と $f(X)$ の $(1, \lambda_1)$ からの NP は一致する．つまり，$f_1(X)$ は $N-1$ が (1) または (2) を満たす．さらに，(1) のとき，λ をこえる傾き λ^f が $f(X)$ の NP にあるので，$f_1(X)$ の NP にもある．したがって，$f_1(X)$ は $D(p^\lambda) \subset D(p^{\lambda^f})$ で収束．(2) のとき，$f(X)$ の NP の最後の傾きが λ なので，補題5の主張の通り，$f_1(X)$ は $D(p^\lambda)$ で収束．帰納法の仮定より，次数 $N-1$ の $h_1(X)$ と，$D(p^\lambda)$ で収束し根をもたない $g(X)$ が存在して $h_1(X) = f_1(X)g(X)$ を満たす．この等式の両辺に $(1 - cX)$ をかければ，$(1 - cX)h_1(X)$ の NP は $f(X)$ のものと $(N, \mathrm{ord}_p a_N)$ まで一致し，帰納法が進む．

□

3. 参考文献

[1] Neal Kobliz. “ p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions ”, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, 58 (1984), Springer-Verlag.

[2] Joseph H. Silverman. “ The Arithmetic of Dynamical Systems, Graduate Texts in Mathematics ”, 241 (2007), Springer-Verlag.