P-6

測度をポテンシャルに持つ 2 次元シュレーディンガー作用素の固有値について

An eigenvalue of 2-D Schrödinger operator with potential-measure

竹渕 和希 [1]
Kazuki Takebuchi [1]

Abstract: We consider two dimensional Schrödinger operators with potential-measure $H_{\alpha\mu} = -\Delta - \alpha\mu$. Here, $\alpha > 0$ is a small parameter, and μ is a Radon measure belonging to generalized Kato's class. We assume that there exists a unique eigenvalue $\lambda(\alpha)$ of $H_{\alpha\mu}$, and this eigenvalue is negative. We study asymptotic behavior of this eigenvalue as $\alpha \to 0+$.

1. シュレーディンガー作用素の固有値問題

2 次元シュレーディンガー作用素のスペクトルについて考察する. まず, $\mathbb{R}^2$ 上のラプラス作用素 $-\Delta$ のスペクトルについては, よく知られているように $\sigma(-\Delta) = [0, \infty)$ である. ここで, $\sigma(-\Delta)$ は $-\Delta$ のスペクトルを表す. そこでラプラス作用素 $-\Delta$ に一般化された Kato クラスに属するラドン測度 μ をポテンシャルに持つ 2 次元シュレーディンガー作用素 $H_{\alpha\mu} = -\Delta - \alpha\mu$ を考える. ここで, $\alpha > 0$ は正の実数とする. $H_{\alpha\mu}$ の固有値 $\lambda(\alpha)$ がただ一つ存在し, その値が負の時, $\alpha \to 0$ とした時の $\lambda(\alpha)$ と対応する固有関数の挙動を調べた論文 [4] について報告する. 以下, $L^2_\mu = L^2(\mathbb{R}^2; d\mu)$ とする.

定義 1.1. $\mathbb{R}^2$ 上のラドン測度 μ が一般化された Kato クラスに属するとは,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \int_{|x-y|<\varepsilon} |\log(|x-y|)| \, d\mu(y) = 0$$

を満たすことである. K を $\mathbb{R}^2$ 上の一般化された Kato クラスに属するラドン測度 μ で $\mu(\mathbb{R}^2) < \infty$ となるもののなす集合とする.

Kondej-Votoreichik [4] は次を示した.

定理 1.2. $\mu \in K$ とし, 十分小さい $\alpha > 0$ に対して, ただ 1 つの $H_{\alpha\mu}$ の負の固有値 $\lambda(\alpha)$ が存在したとする. このとき, 以下が成り立つ.

1. $H_{\alpha\mu}$ の固有値 $\lambda(\alpha)$ は, $\alpha \to 0+$ の時,
$$\lambda(\alpha) = -(C_\mu + o(1)) \exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha\mu(\mathbb{R}^2)}\right)$$
と表せる. ただし, $C_\mu > 0$ は μ に依存する定数である.

2. 固有値 $\lambda(\alpha)$ に対応する固有関数 $f_\alpha(x)$ は, $\alpha \to 0+$ の時,
$$f_\alpha(x) = \frac{\sqrt{-\lambda(\alpha)}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} K_0(\sqrt{-\lambda(\alpha)}|x-y|) d\mu(y) + O\left(\frac{1}{\log\sqrt{-\lambda(\alpha)}}\right)$$
と表せる. ただし, $K_0(\cdot)$ は修正ベッセル関数である.

修正ベッセル関数 $K_0(\cdot)$ を用いてラプラス作用素 $-\Delta$ の $\lambda < 0$ に対するレゾルベント $(-\Delta - \lambda)^{-1}$ は, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ に対して,

$$(-\Delta - \lambda)^{-1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K_0(\sqrt{-\lambda}|x-y|) f(y) dy$$

と積分表示できる. そこで, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ と $x \in \operatorname{supp}\mu$ に対して,

$$Q(\lambda) f(x) := \int_{\mathbb{R}^2} K_0(\sqrt{-\lambda}|x-y|) f(y) d\mu(y),$$

$x \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$R_{\mu dx}(\lambda) f(x) := \int_{\mathbb{R}^2} K_0(\sqrt{-\lambda}|x-y|) f(y) d\mu(y)$$

と定める.

命題 1.3. $L^2_\mu \ni h \mapsto R_{\mu dx}(\lambda) h \in H^1 \cap L^2_\mu$ は, $\ker(I - \alpha Q(\lambda))$ から $\ker(H_{\alpha\mu} - \lambda)$ への全単射である.

この命題を用いることで, $H_{\alpha\mu}$ の固有値問題を, $Q(\lambda)$ の固有値問題に置き換えることができる. $k > 0$ に対して $\lambda = -k^2$ と置き, $Q(-k^2)$ を考える. すると, $f \in L^2_\mu$ に対して,

$$\begin{aligned} Q(-k^2) f(x) &= -\frac{1}{2\pi} \log k \int_{\mathbb{R}^2} f(y) d\mu(y) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (-\log|x-y| - C_E + \log 2) f(y) d\mu(y) \\ &+ O(k^2 \log k) \|f\|_{L^2_\mu} \quad k \to 0+ \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つ. ただし, C_E はオイラー定数である. ここで,

$$R f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (-\log|x-y| - C_E + \log 2) f(y) d\mu(y)$$

と定めると, これは L^2_μ での有界作用素となる.

補題 1.4. $Q(-k^2)$ のスペクトルのうち, 0 近傍にあるものを $\sigma_0(Q(-k^2))$, 1 近傍にあるものを $\sigma_1(Q(-k^2))$ とし, $Q(-k^2)$ のただ 1 つの固有値 $\gamma(k)$ が存在し, $\sigma_1(Q(-k^2))$ は $\gamma(k)$ のみからなるとする. このとき, 以下が成り立つ.

1: 日大理工・院 (前)・数学

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 十分小さい $k > 0$ が存在して,

$$\sigma(Q(-k^2)) = \sigma_0(Q(-k^2)) \cup \sigma_1(Q(-k^2)),$$

$$\sigma_0(Q(-k^2)) \cap \sigma_1(Q(-k^2)) = \emptyset$$

となる.

2. $\gamma(k)$ は連続で, $k_1 < k_2$ に対し, $\gamma(k_1) > \gamma(k_2)$ であり, $k \to 0+$ の時, $\gamma(k) \to +\infty$ となる.

2. 非解析的摂動理論

H をヒルベルト空間とする. $k > 0$ に対して,

$$T(k) := T_0 + \frac{1}{\log k} T_1 + O\left(\frac{1}{\log^2 k}\right) \quad k \to 0+$$

で表される H 上の自己共役作用素を調べる. ただし, $\|\varphi\|_H = 1$ を満たす $\varphi \in H$ と, $\psi \in H$ に対して, $T_0\psi = (\psi, \varphi)_H \varphi$ であり, T_1 は H で有界な自己共役作用素である.

定理 2.1. $T(k)$ のスペクトルのうち 0 近傍にあるものを $\sigma_0(k)$, 1 近傍にあるものを $\sigma_1(k)$ と表す. $T(k)$ のただ 1 つの固有値 $\omega(k)$ が存在し, $\sigma_1(k)$ は $\omega(k)$ のみからなるとする. このとき, $T(k)$ のスペクトル $\sigma(T(k)) \subset \mathbb{R}$ は, 十分小さい $k > 0$ に対して,

$$\sigma(T(k)) = \sigma_0(k) \cup \sigma_1(k), \quad \sigma_0(k) \cap \sigma_1(k) = \emptyset$$

と表せる. また, 次が成り立つ.

1. 固有値 $\omega(k) \in \sigma_1(k)$ に対応する正規化された固有関数 φ_k は, H のノルムの意味で

$$\varphi_k = \varphi + O\left(\frac{1}{\log k}\right), \quad k \to 0+$$

をみたす.

2. 固有値 $\omega(k) \in \sigma_1(k)$ は

$$\omega(k) = 1 + \frac{1}{\log k}(T_1\varphi, \varphi) + O\left(\frac{1}{\log^2 k}\right), \quad k \to 0+$$

をみたす.

3. 主定理の証明の概略

$\mu \in K$ に対して

$$T(k) := -\frac{2\pi}{\mu(\mathbb{R}^2)\log k} Q(-k^2) \tag{2}$$

とすると (1) から, $k \to 0+$ の時,

$$T(k)f(x) = \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} f(y)d\mu(y) - \frac{2\pi}{\mu(\mathbb{R}^2)\log k} Rf(x) + O(k^2)\|f\|_{L^2_\mu}$$

となる. $T_1 = -\frac{2\pi}{\mu(\mathbb{R}^2)} R$ とすると, これは L^2_μ で有界で, 定理 2.1 を使うことができる. $\varphi = \frac{1_{\operatorname{supp}\mu}}{\sqrt{\mu(\mathbb{R}^2)}}$ に対し, $\alpha \to 0+$ とする時,

$$\omega(k(\alpha)) = 1 - \frac{2\pi}{\mu^2(\mathbb{R}^2)\log k(\alpha)}(R1_{\operatorname{supp}\mu}, 1_{\operatorname{supp}\mu})_{L^2_\mu} + O\left(\frac{1}{\log^2 k(\alpha)}\right) \tag{3}$$

と表せる. $Q(-k^2(\alpha))$ の固有値 $\gamma(k(\alpha))$ は,

$$\gamma(k(\alpha)) = -\frac{\mu(\mathbb{R}^2)\log k(\alpha)}{2\pi}\omega(k(\alpha))$$

と表すことができる.

$\lambda(\alpha) = -k^2(\alpha)$ と置くと, (2) と命題 1.3 より

$$\alpha\gamma(k(\alpha)) = -\frac{\alpha}{2\pi}\mu(\mathbb{R}^2)\omega(k(\alpha))\log k(\alpha) = 1 \tag{4}$$

が得られる. (3) を (4) に代入し, $\log k(\alpha)$ について整理すると, $\alpha \to 0+$ の時,

$$\log k(\alpha) = -\frac{2\pi}{\alpha\mu(\mathbb{R}^2)} + \frac{2\pi}{\mu^2(\mathbb{R}^2)}(R1_{\operatorname{supp}\mu}, 1_{\operatorname{supp}\mu}) + o(1)$$

となる. この等式を

$$\lambda(\alpha) = -k^2(\alpha) = -\exp(2\log k(\alpha))$$

に代入すれば $\lambda(\alpha)$ の展開が得られる.

4. 参考文献

[1] J. F. Brasche, P. Exner, Yu. A. Kuperin, P. Seba, *Schrödiger operators with singular interactions*, J. Math. Anal. Appl. **184** (1994), 112-139.

[2] J. Dancis, Ch. Davis, *An interlacing theorem for eigenvalues of self-adjoint operators*, Linear Algebra Appl. 88/89 (1987), 117–122.

[3] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, 132, Springer, 1966.

[4] S. Kondej, V. Lotoreichik, *Weakly coupled bound state of 2-D Schrödinger operator with potential-measure*, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), 1416–1438.

[5] V. Kostrykin, K. A. Makarov, A. K. Motovilov, *Perturbation of spectra and spectral subspaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 77–89.

[6] 新井仁之, 新・フーリエ解析と関数解析学, 培風館, 2012.

[7] 谷島賢二, シュレーディンガー方程式 I,II, 朝倉出版, 2014.