P-8

明示的な Jacquet-Zagier 型跡公式について
On explicit Jacquet-Zagier type trace formulas

○杉山　真吾 [1]
*Shingo Sugiyama [1]

Abstract: Let F be a finite totally real number field and $\mathbb{A}_F$ the ring of adèles of F. In this talk, we give generalized trace formulas with complex parameter z for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$. This is a joint work with Masao Tsuzuki (Sophia University).

1. はじめに

モジュラー形式の空間上の Hecke 作用素の固有値は, 複素関数論に現れる整数論的な量である. この Hecke 作用素の跡公式 (Eichler-Selberg 跡公式) の変数付き一般化を紹介し, モジュラー形式の Fourier 係数の分布や対称 2 次 L 関数の特殊値の非ゼロ性への応用を紹介する (上智大学の都築正男氏との共同研究).

重さ k, レベル $\Gamma_0(N)$ の楕円カスプ形式全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $S_k(N)$ とすると, N と互いに素な $n \in \mathbb{N}$ に対して, Hecke 作用素 $T_n \in \mathrm{End}(S_k(N))$ を

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{a,d\in\mathbb{N}\\ ad=n}} \frac{1}{d^k} \sum_{b=0}^{d-1} f(\tfrac{az+b}{d})$$

で定めることができる. Eichler-Selberg 跡公式とは, T_n のトレースの 2 通りの表示によって得られる等式である.

定理 1 簡単のため $N=1$ とし, k を 4 以上の偶数とする.

$$\sum_{f\in B_k(1)} a_f(n) = \mathrm{tr}(T_n) = J_{\mathrm{i}} + J_{\mathrm{u}} + J_{\mathrm{h}} + J_{\mathrm{e}}.$$

ここで $B_k(1)$ は $\{T_n\}_n$ の同時固有関数からなる $S_k(1)$ の *Petersson* 内積に関する直交基底である. また,

$$J_{\mathrm{i}} = \delta(\sqrt{n}\in\mathbb{N})\frac{k-1}{12}n^{\frac{k-1}{2}},\ J_{\mathrm{u}} = \delta(\sqrt{n}\in\mathbb{N})\frac{-n^{\frac{k-1}{2}}}{2},$$

$$J_{\mathrm{h}} = -\frac{1}{2}\sum_{d,d'>0,\ n=dd',\ d\neq d'} \min(d,d')^{k-1},$$

$$J_{\mathrm{e}} = \sum_{\substack{t\in\mathbb{Z}\\ t^2-4n=f^2D<0}} \frac{-h(E)}{\#\mathfrak{o}_E^\times} \sum_{0<d\mid f} d \times \prod_{p\mid d}(1-p^{-1}\chi_D(p))\, n^{\frac{k-2}{2}} U_{k-2}(\tfrac{t}{2\sqrt{n}}).$$

ここで条件 P に対して $\delta(P)$ は P が成立する時に 1, 成立しない時に 0 とする. $t^2-4n<0$ となる整数 t に対して $E=\mathbb{Q}(\sqrt{t^2-4n})$ とおいた. $h(E)$ は E の類数, $\mathfrak{o}_E$ は E の整数環である. また, $D<0$ は E の判別式である. χ_D は大域類体論により E に対応する 2 次 *Dirichlet* 指標である. U_{k-2} は $k-2$ 番目の第 2 種 *Chebyshev* 多項式である.

2. 跡公式の一般化

Zagier [5] はレベルが $N=1$ の場合に, $T_n\in\mathrm{End}(S_k(1))$ の跡公式の一般化として, 完備化された対称 2 次 L 関数の重み付きトレースの公式

$$\sum_{f\in B_k(1)} \frac{L(s,f,\mathrm{Sym}^2)}{L(1,f,\mathrm{Sym}^2)} a_f(n) = P_n(s) + Q_n(s)$$

を与えた. ここで s は $1-k<\Re(s)<k-1$ なる任意の複素数とする. また, $P(s)$, $Q(s)$ は有理型関数で,

$$P_n(s) = \frac{k-1}{2\pi} 2^{1-z} \pi^{\frac{3-z}{4}} \frac{\Gamma(k+\frac{z-1}{2})}{\Gamma(k)\Gamma(\frac{z+1}{4})} \zeta_{\mathbb{Q}}(-z) n^{\frac{k-1}{2}-\frac{z+1}{4}}.$$

$\zeta_{\mathbb{Q}}$ は完備 Riemann ゼータ関数. また $\Delta = t^2-4m$ として,

$$Q_n(s) = \frac{k-1}{2\pi}(-1)^{k/2} 2^{\frac{z-3}{2}+k} \Gamma_{\mathbb{R}}(\tfrac{z+3}{2}) n^{k-1} \times \sum_{t\in\mathbb{Z}} \{I_k(\Delta,t,\tfrac{z+1}{2}) + I_k(\Delta,-t,\tfrac{z+1}{2})\} L(\tfrac{z+1}{2},\Delta)$$

とする. ここで

$$I_k(\Delta,s) = \frac{\Gamma(k-1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{y^{k+s-2}}{(y^2+ity-\Delta/4)^{k-1/2}} dy$$

とした. Δ は判別式 (4 で割った余りが $0,1$) なので $\Delta = Df^2$ (D は基本判別式 or 1 で, $f\in\mathbb{N}$) と一意的に表せるので, Δ に付随する L 関数 $L(s,\Delta)$ を

$$L(s,\Delta) = \begin{cases} L(s,\chi_D)\sum_{d\mid f}\mu(d)\chi_D(d)d^{-s}\sigma_{1-2s}(f/d) & (\Delta\neq 0) \\ \zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1) & (\Delta=0) \end{cases}$$

とで定める. Δ が平方数の時は $D=1$ とし, χ_D は法 1 の自明な Dirichlet 指標とする. Zagier の公式の Hilbert モジュラー形式版は水本 [2] や高瀬 [4] の結果が知られている. これらの結果を一般化することが今回の目的である.

さて, F を有限次総実代数体とする. F の整数環 $\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{a}$ を割る素点全体の集合を $S(\mathfrak{a})$ とする. $\mathrm{N}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の絶対ノルムとする. F の有限素点 v に対して完備化の剰余体の濃度を q_v とする.

1: 日大理工・教員・数学

モジュラー形式に対応するものとして, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の既約カスピダル保型表現 π で中心指標が自明, 重さが $k = (k_v)_{v|\infty} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 2}^{[F:\mathbb{Q}]}$, コンダクター $\mathfrak{f}_\pi$ が $\mathfrak{n}$ を割り切るもの全体を $\Pi_{\mathrm{cusp}}(k, \mathfrak{n})$ とする. $\mathfrak{n}$ は以下 $\mathfrak{o}_F$ の非ゼロな square-free イデアルとする.

定義 2 F の有限素点からなる有限集合 S で $S(\mathfrak{n})$ とは *disjoint* なものを固定する. $\alpha = \otimes_{v\in S}\alpha_v$ は複素多様体 $\prod_{v\in S}\mathbb{C}/4\pi i(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z}$ 上の正則関数で, 各 α_v は偶函数とする. この時, $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$I_{\mathrm{cusp}}(z) = (-1)^{\#S}\frac{D_F^{z-1/2}}{2}C(k,\mathfrak{n})\,\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{(z-1)/2} \times \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})} W_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\pi)\frac{L(\frac{z+1}{2},\pi,\mathrm{Sym}^2)}{L(1,\pi,\mathrm{Sym}^2)}\alpha(\nu_S(\pi))$$

と定める. ここで, D_F を F の判別式の絶対値とし,

$$C(k,\mathfrak{n}) = D_F^{-1}\{\prod_{v\in\Sigma_\infty}\frac{4\pi}{k_v-1}\}\{\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}(1+q_v)^{-1}\}$$

とおいた. $W_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\pi)$ は $\{q_v^{z/2}+q_v^{-z/2}\}_{v\in S}$ に関する明示的な多項式である (詳細は略).

定理 3 *([3])* $z \in \mathbb{C}$ が $|\Re(z)| < \min_{v\in\Sigma_\infty} k_v - 3$ の時,

$$I_{\mathrm{cusp}}(z) = J_{\mathrm{id}}(z) + J_{\mathrm{unip}}(z) + J_{\mathrm{hyp}}(z) + J_{\mathrm{ell}}(z)$$

が成立する. $J_{\mathrm{id}}(z)$, $J_{\mathrm{unip}}(z)$, $J_{\mathrm{hyp}}(z)$, $J_{\mathrm{ell}}(z)$ はそれぞれ, $J_{\mathrm{id}}(z) = 0$, $J_{\mathrm{unip}}(z) = D_F^{z/4}\{G(z)+G(-z)\}$, 但し

$$G(z) = D_F^{-\frac{z+2}{4}}\zeta_F(-z)\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}\frac{1+q_v^{\frac{z+1}{2}}}{1+q_v}\prod_{v|\infty}\{2^{1-z}\pi^{\frac{3-z}{4}} \times \frac{\Gamma\left(k_v+\frac{z-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+1}{4}\right)\Gamma(k_v)}\}\prod_{v\in S}\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\frac{2\pi}{\log q_v}}^{c+i\frac{2\pi}{\log q_v}}\frac{-q_v^{-(s_v+1)/2}}{1-q_v^{-s_v-(z+1)/2}} \times \alpha_v(s_v)\frac{\log q_v}{2}(q_v^{(1+s_v)/2}-q_v^{(1-s_v)/2})\,ds_v\}$$

であり, $\zeta_F(s)$ は完備 *Dedekind* ゼータ関数である. また,

$$J_{\mathrm{hyp}}(z) = \frac{D_F^{-1/2}}{2}\zeta_F\left(\frac{1-z}{2}\right) \times \sum_{a\in\mathfrak{o}_F(S)_+^\times-\{1\}}\mathbf{B}_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\alpha|1;\tfrac{a}{(a-1)^2}\mathfrak{o}_F)\prod_{v|\infty}\mathcal{O}_v^{+,(z)}(\tfrac{a+1}{a-1}).$$

但し $\mathfrak{o}_F(S)_+^\times$ は S 整数環の総正単数全体の集合. $\mathbf{B}$ と $\mathcal{O}$ は明示的に書ける (詳細は略). そして,

$$J_{\mathrm{ell}}(z) = \tfrac{1}{2}D_F^{-1}\sum_{(t:n)_F}\mathrm{N}(\mathfrak{d}_\Delta)^{\frac{z+1}{4}}L\left(\tfrac{z+1}{2},\chi_\Delta\right) \times \mathbf{B}_{\mathfrak{n}}^{(z)}(\alpha|\Delta;n\mathfrak{f}_\Delta^{-2})\prod_{v|\infty}\mathcal{O}_v^{\mathrm{sgn}_v(\Delta),(z)}(t|\Delta|_v^{-1/2}).$$

ここで, $\Delta = t^2-4n$ で, $\mathfrak{d}_\Delta$ は $F(\sqrt{\Delta})/F$ の相対判別イデアルである. 同値類 $(t:n)_F = \{(ct,c^2n)\in F^2 | c\in F^\times\}$ は様々な明示的条件を満たすように走る. $\mathbf{B}$ と $\mathcal{O}$ も明示的に書ける (詳細は略).

アデリックな手法の先行研究として $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ (K は大域体) の観点で Jacquet, Zagier [1] の公式があるが, 彼らは抽象的な展開しか与えておらず, Zagier の公式が復元できるかどうかも未解決である.

対称 2 次 L 関数の特殊値 $L(s,\pi,\mathrm{Sym}^2)$ ($1/2 \leq s < 1$) の非ゼロ性への応用を述べる. $k = (k_v)_{v|\infty}$ を $\min_{v|\infty} k_v \geq 6$ となるものとして固定する. 次の仮定を用意する.

(P) : $L(\frac{z+1}{2},\pi,\mathrm{Sym}^2) \geq 0$ が $\forall z\in[0,1)$, $\forall\mathfrak{n}$ $\forall\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})$ で成立する.

この仮定 **(P)** は, $L(s,\pi,\mathrm{Sym}^2)$ たちの一般 Riemann 予想を仮定すると中間値の定理から直ちに従う.

F のイデアル類群の完全代表系 $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_h$ を, $\mathfrak{o}_F$ の素イデアルになるようにとる. S は F の有限素点からなる有限集合で $S(2\prod_{j=1}^h\mathfrak{a}_j)$ と disjoint とする.

系 4 *([3])* **(P)** を仮定する. 各 $v\in S$ に対して $[-2,2]$ の任意の部分区間 $J_v = [t_v,t_v']$ (但し $t_v < t_v'$) を取る. この時, ある $M>0$ が存在して, $S\cup S(2\prod_{j=1}^h\mathfrak{a}_j)$ と互いに素な任意の素イデアル $\mathfrak{n}$ (但し $\mathrm{N}(\mathfrak{n}) > M$) と任意の $z\in[0,1]$ に対して, 以下の *3* 条件を満たすカスピダル保型表現 $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(k,\mathfrak{n})$ が存在する: *(1)* $\mathfrak{f}_\pi = \mathfrak{n}$, *(2)* $L(\frac{z+1}{2},\pi,\mathrm{Sym}^2)\neq 0$, *(3)* $(q_v^{\nu_v(\pi)/2}+q_v^{-\nu_v(\pi)/2})_{v\in S}\in\prod_{v\in S}J_v$.

ここで $\mathrm{diag}(q_v^{\nu_v(\pi)/2},q_v^{-\nu_v(\pi)/2})$ は π の v 成分の佐武パラメーター. 上の結果は $\prod_{v\in S}J_v = [-2,2]^S$ の時は, **(P)** は必要はない.

特に $L(\frac{z+1}{2},\pi,\mathrm{Sym}^2)\neq 0$ なる保型表現 π が無限個存在する. 従来の証明法は関数論 (大域的手法) に依るが, 本研究では表現論 (局所的手法) なる新たな手法を用いた.

3. 参考文献

[1] Jacquet, H., Zagier, D., *Eisenstein series and the Selberg trace formula II*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** No.1, 1–48, 1987.

[2] Mizumoto, S., *On the second L-functions attached to Hilbert modular forms*, Math. Ann. **269**, 191–216, 1984.

[3] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, J. Func. Anal. Vol. **275**, Issue 11, 2978–3064, 2018.

[4] Takase, K., *On the trace formula of the Hecke operators and the special values of the second L-functions attached to the Hilbert modular forms*, manuscripta math. **55**, 137–170, 1986.

[5] Zagier, D., *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, Lecture Notes in Math., **627**, 105–169, Springer, 1977.