

階段状水路におけるレイノルズ数が大きい場合の空気混入不等流の空気混入率と水面形についての二、三の検討

An analytical method of air concentration and water surface profile for nonuniform aerated skimming flow at large Reynolds number in a stepped channel

○高崎直¹, 佐藤柳言², 高橋正行²

*Nao Takasaki¹, Ryugen Satoh², Masayuki Takahashi²

Abstract: On stepped channels, an analytical equation for the calculation of air concentration and water surface profile has been developed in nonuniform aerated flow. The water surface profile of the aerated skimming flow is calculated by using the equation together with the continuity equation for the air phase. For a large Reynolds number, the results agree with the experimental data of Ruff and Ward (2002).

1. まえがき

階段状水路は、急傾斜水路を流下する高速流を傾斜面上で減勢させる方法として利用されている^{[1],[2]}。階段状水路に流入した流れが skimming flow (各ステップ隅角部で常に渦の形成が認められる流況) となる場合^[1]、平坦な傾斜水路よりも短い流下距離で水面から空気が混入し始める。この断面は inception point (以下 I.P. と略す、Fig.1) と呼ばれ、I.P. より下流側は空気混入水流となる。空気混入水流は不等流区間と擬似等流区間に分類される。

擬似等流空気混入水流の水力特性については、Takahashi and Ohtsu^[2] によって明らかにされた。また、空気混入不等流の空気混入率 $C = \frac{\text{空気の体積}}{\text{水の体積} + \text{空気の体積}}$ と水面形については、高橋ら^[3] によって、解析的計算法が示された。しかしながら、レイノルズ数 $Re (= q_w / \nu, q_w$ は単位幅流量、 ν は水の動粘性係数) が大きい場合に対しても、この解析的計算法が適用できるかは明確にされていない。Ruff and Ward^[4] は、レイノルズ数が大きい場合 (Tab.1 参照) の空気混入不等流を対象に、空気混入率と水面形についての実験的検討を行い、その空気混入率分布の測定値が示されている。

本研究は、階段状水路の空気混入不等流における空気混入率と水面形との解析的計算法を Re が 10^6 オーダーでも適用可能かを調べるため、Ruff and Ward^[4] の実験結果を用いて空気混入不等流の空気混入率と水面形の解析的計算法を検証したものである。

2. 空気混入開始断面

空気混入開始位置 (I.P.) は水路横断方向全体に空気が混入した最上流側断面と定義され、一般には目視観察によって定められている。断面平均空気混入率 C_m は、

$$C_m = \frac{1}{y_{0.9}} \int_0^{y_{0.9}} C dy \quad (1)$$

で定義され、I.P. での C_m の値 C_{mi} は水路傾斜角度 θ と S/d_c (S はステップ高さ、 $d_c [= \sqrt[3]{q_w^2/g}]$ は限界水深、 g は重力加速度) に関わらず $C_{mi} \approx 0.2$ であることが示されている^[3]。ここに、 y は仮想底面に垂直上向きの座標、 $y_{0.9}$ は空気混入流水深であり $C = 0.9$ となる y の値である。

I.P. までの流下距離 x_i (x は仮想底面に沿った流下方向座標) と I.P. での水のみへ換算した水深 $d_{wi} [= (1 - C_{mi})y_{0.9}]$ について、それぞれ、

$$\frac{x_i}{d_c} = \frac{5.0}{\sin^{0.485} \theta} \left(\frac{S}{d_c} \cos \theta \right)^{0.455}, \quad (2)$$

$$\frac{d_{wi}}{d_c} = \frac{0.35}{\sin^{0.30} \theta} \left(\frac{S}{d_c} \cos \theta \right)^{0.10} \quad (3)$$

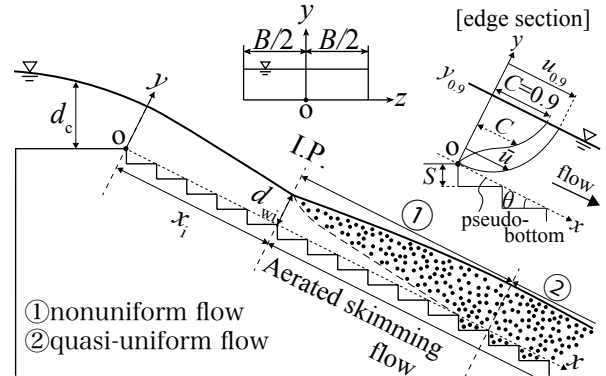


Figure 1. Definition sketch for aerated skimming flow

Table 1. Experimental investigations of air concentration

Reference	$\theta(^{\circ})$	S/d_c	$Re \times 10^{-6}$
Ruff and Ward ^[4]	26.6	0.74	2.3

の実験式^[5]が提案されている。

3. 空気混入率

Skimming flow の空気混入不等流区間での C_m の流下方向変化について、気相の連続の式^{[6],[7]}、

$$\frac{1}{(1 - C_{m_u})^2} \ln \left(\frac{1 - C_m}{C_{m_u} - C_m} \right) - \frac{1}{(1 - C_{m_u})(1 - C_m)} = k_0 \frac{x/d_c - x_i/d_c}{d_{wi}/d_c} + K_0 \quad (4)$$

が適用できることが示されている^[3]。ここに、 $k_0 = (u_r d_{wi} \cos \theta) / q_w$ 、 $K_0 = \frac{1}{1 - C_{m_u}} \left[\frac{1}{1 - C_{m_i}} \ln \left(\frac{1 - C_{m_i}}{C_{m_u} - C_{m_i}} \right) - \frac{1}{1 - C_{m_i}} \right]$ であり、 u_r は気泡の上昇速度で $u_r = 0.4$ m/s とする^[6]。 C_{m_u} は擬似等流区間での C_m であり、

$$C_{m_u} = \left(\frac{6.9}{\theta} - 0.12 \right) \frac{S}{d_c} + 0.656 \{ 1 - e^{-0.0356(\theta - 10.9)} \} + 0.073 \quad (\theta \text{ in deg.}) \quad (5)$$

が提案されている^[2]。与えられた θ と S/d_c に対して、(3) から d_{wi}/d_c 、(5) から C_{m_u} 、および $C_{m_i} = 0.2$ を境界条件として (4) を用いることで流下方向に対する C_m の計算値が求められる。与えられた θ と S/d_c に対する C_m の計算値と測定値の一例を Fig.2 に示す。Fig.2 に示されるように、 $(x - x_i)/d_c$ の増加とともに C_m の値は大きくなる。また、 C_m の計算値と測定値は誤差率 17% 以内で一致する。空気混入不等流の edge 断面での C の分布を気泡の拡散モデル^[6]、

1: 日大理工・院(前)・土木 2: 日大理工・教員・土木

$$C = 1 - \tanh^2 [k' - Y/(2D')] \quad (6)$$

で近似する．ここに， $Y = y/y_{0.9}$ ， $D' = (0.848C_m - 0.00302)/(1 + 1.1375C_m - 2.2925C_m^2)$ ， $k' = \tanh^{-1} \sqrt{0.1 + 1/(2D')}$ である．(4) より得られた C_m を (6) に代入することで C の計算値が求められる．与えられた θ ， S/d_c ， $(x-x_i)/d_c$ に対する C の計算値と測定値の一例を **Fig.3** に示す．**Fig.3** に示されるように， C の計算値と測定値は決定係数 $R^2 = 0.90$ で一致している．

4. Clear water depth の水面形

空気混入水流における clear water depth d_w は，

$$d_w = \int_0^{y_{0.9}} (1 - C) dy = (1 - C_m)y_{0.9} \quad (7)$$

で定義され [2],[6] ている．階段状水路における空気混入流を連続体として取り扱い，空気混入率 C の変化を空気混入水流の密度 $\rho = (1 - C)\rho_w$ ， ρ_w は水の密度] の変化として表せるものとする，空気混入不等流の水面形方程式は，

$$\frac{dd_w}{dx} = \sin \theta \frac{\left(\frac{d_w}{d_c}\right)^3 - \left(\frac{d_{wu}}{d_c}\right)^3}{C_p \left(\frac{d_w}{d_c}\right)^3 \cos \theta - C_v} \quad (8)$$

のように示される [5]．ここに，

$$C_p = \frac{\int_0^1 \{(1 - C)Y + \int_Y^1 (1 - C)dY\} U dY}{(1 - \int_0^1 C dY) \int_0^1 (1 - C) U dY}, \quad (9)$$

$$C_v = \frac{(1 - \int_0^1 C dY)^2 \int_0^1 (1 - C) U^3 dY}{\left\{ \int_0^1 (1 - C) U dY \right\}^3} \quad (10)$$

であり [2]， $U = [\bar{u}/u_{0.9}]$ は $Re \geq 3.0 \times 10^4$ の場合 [5]， $(x-x_i)/d_c$ によらず， $1/N$ 乗則 ($U = Y^{1/N}$) で近似される．ここに， \bar{u} は x 方向の時間平均流速， $u_{0.9}$ は $y = y_{0.9}$ での \bar{u} である．擬似等流区間における N の実験式 [2]，

$$N = 14\theta^{-0.65} \frac{S}{d_c} \left(\frac{100 S}{\theta d_c} - 1 \right) - 0.041\theta + 6.27 \quad (\theta \text{ in deg.}) \quad (11)$$

を不等流区間においても適用できる [3]． d_{wu} は擬似等流における d_w であり，擬似等流区間の抵抗係数 $f_u \left[= 8 \left(\frac{d_{wu}}{d_c} \right)^3 \sin \theta \right]$ の実験式 [2]，

$$f_u = \left(-9.2\theta \times 10^{-4} + 0.12 \right) \tanh \left(4 \frac{S}{d_c} \right) + 3.8\theta^2 \times 10^{-5} - 4.4\theta \times 10^{-3} + 0.135 \quad (\theta \text{ in deg.}) \quad (12)$$

から求めることができる．(3) より d_{wi}/d_c ，(12) より d_{wu}/d_c の境界条件を与え，(11) を $1/N$ 乗則に用いて (8) を数値積分すると不等流区間の d_w の計算値が得られる． d_w/d_c の計算値と測定値の一例を **Fig.4** に示す．**Fig.4** に示されるように， d_w/d_c は $(x-x_i)/d_c$ の増加とともに小さくなる．また， d_w/d_c の計算値と測定値は誤差率 20% 以内で一致する．

5. 空気混入流水深

空気混入水流の代表水深としては， $y_{0.9}$ を用いる [2],[6]．本計算による d_w/d_c と C_m の値を用いることで (7) より $y_{0.9}/d_c$ の計算値が得られる． $y_{0.9}/d_c$ の計算値と測定値の

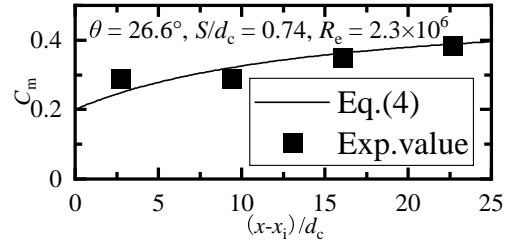


Figure 2. Depth-averaged air concentration

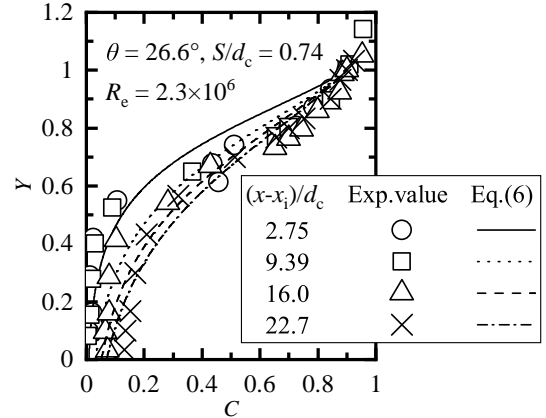


Figure 3. Distributions of air concentration

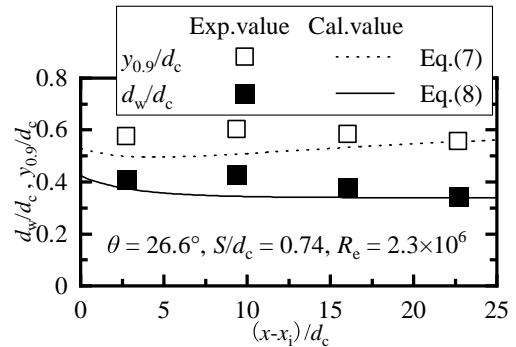


Figure 4. Clear water depth and aerated flow depth

一例を **Fig.4** に示す．**Fig.4** に示されるように， $y_{0.9}/d_c$ の計算値と測定値は誤差率 15% 以内で一致する．

6. まとめ

階段状水路での空気混入不等流に対し，レイノルズ数 $Re = 2.3 \times 10^6$ の場合についても，(4)，(6)，(7)，(8) の空気混入率と水面形の解析的計算法を適用できることが示された．

参考文献

- [1] Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: Flow characteristics of skimming flows in stepped channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.130, No.9, pp.860–869, 2004.
- [2] Takahashi, M. and Ohtsu, I.: Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.50, No.4, pp.427–434, 2012.
- [3] 高橋正行, 竜沢宗一郎, 大津岩夫: 階段状水路の skimming flow における空気混入不等流の水利特性, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.73, No.4, pp.I_721–I_726, 2017.
- [4] Ruff, J. and Ward, J.: *Hydraulic design of stepped spillways*, U.S. Bureau of Reclamation, Report Number PAP-951, 2002.
- [5] 高橋正行, 大津岩夫: 階段状水路の skimming flow における空気混入不等流解析, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.69, No.4, pp.I_913–I_918, 2013.
- [6] Chanson, H.: *The hydraulics of stepped chutes and spillways*, A.A.Balkema, Lisse, 2002.
- [7] Wood, I. R.: Air water flows, *Proceedings of the 21st IAHR Congress*, Melbourne, Australia, pp.18–29, 1985.