H-4

曲がりばりのアイソジオメトリック解析における NURBS ソリッド要素の収束率評価

Convergence Rate Evaluation of NURBS Solid Elements in Isogeometric Analysis of a Curved Beam

○唐澤奈央子 [1]，長谷部寛 [2]
*Naoko Karasawa[1]，Hiroshi Hasebe[2]

Abstract: The finite element analysis is used for detailed study in the structural design of bridges. However, one finite element analysis may cause geometrical errors in the process of mesh generation. Recently, isogeometric analysis can exactly represent complex curves and curved surfaces by using NURBS, which is used for CAD shape representation, as the basis function of finite elements. In this paper, we conducted an isogeometric analysis of curved beams assuming arch bridges. As a result, we confirmed that NURBS solid elements obtained high convergence rates of relative error.

1. はじめに

橋梁の構造設計の詳細な検討には有限要素解析が用いられる．しかし，有限要素解析は CAD で描いた形状データからメッシュを生成する過程で基底関数の次数に依存して形状誤差を発生することがある．そこでこの問題を解決する解析手法として，Hughes らによりアイソジオメトリック解析が提案された[1]．アイソジオメトリック解析の特徴の一つは， CAD の形状表現に用いられるスプライン関数を近似関数の基底関数に用いることであり，その結果，厳密な形状表現が可能となる．一方で，現状の橋梁の構造解析では部材をはり要素やシェル要素，ソリッド要素により要素分割されているが NURBS ソリッド要素が用いられた事例は僅かしかない．

本研究では，橋梁の構造設計へのアイソジオメトリック解析の導入を目指し，アーチ橋のような曲線部材をイメージし，曲がりばりを対象に NURBS ソリッド要素の収束率評価を行った．

2. NURBS 曲線と基底関数

NURBS 曲線$\mathbf{C}(\xi)$は，式(1)で表される．

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} R_{i,p}(\xi)\mathbf{B}_i \tag{1}$$

ここで，iはコントロールポイントの番号，pは基底関数の次数，$\mathbf{B}_i$は実空間上に配置されるコントロールポイントの座標値により構成される位置ベクトル，$R_{i,p}(\xi)$は NURBS 基底関数であり，式(2)で表される．

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_a^n N_{a,p}(\xi)w_a} \tag{2}$$

ここで，w_iは形状を制御するためのコントロールポイントにおける重み，n はコントロールポイント数，$N_{i,p}(\xi)$は B-Spline 基底関数であり，式(3)で表される．

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 \ (\ \xi_i \le \xi \le \xi_{i+1}) \\ 0 \ \ otherwise. \end{cases} \tag{3a}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{3b}$$

ここで，ξ_iはノットと呼ばれるパラメータであり，曲線上の要素の境界を表す局所座標系の座標値である．

3. 曲がりばりの解析

3.1　支配方程式と解析条件

支配方程式には式(4)の線形弾性体の平衡方程式を採用し，弱形式化した後，Galerkin 法に基づく有限要素法で離散化した．

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \tag{4a}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij,} \ \ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{4b}$$

ここでσ_{ij}は応力テンソル，f_iは物体力，ε_{ij}はひずみテンソル，u_iは変位ベクトル，C_{ijkl}は弾性テンソルである．境界条件には変位規定の条件$u_i = \bar{u}_i$と表面力$h_i = \sigma_{ij}n_j$を規定する条件を用いた．変位および重み関数の基底関数には NURBS を採用した．

解析モデルと境界条件を **Figure 1** に示す．ξ, η, ζはパラメータ空間の座標であり，それぞれξが実空間におけるはりの軸方向，η が軸直交方向，ζが奥行き方向に相当する．ヤング率は E=2.1×10^{11} N/m^2，ポアソン比は ν=0.3 とした．用いた解析メッシュは ξ 方向：η 方向：ζ方向=2 : 1 : 1 の比率を保つように，ξ 方向 2，4，8，16，32 要素の 4 ケースを CAD で作成し，それぞれ 2 次，3 次，4 次の NURBS 基底関数で解析を行った．一例として，基底関数 2 次，ξ 方向 8 要素のメッシュ

1：日大理工・学部・土木　　2：日大理工・教員・土木

と鉛直変位の分布を **Figure 2**，**Figure 3** に示す．少ない要素数でも滑らかな変位の分布が得られた．

3.2　ガウス積分点数の検討

NURBS 基底関数の要素積分には数値積分が用いられる．本研究ではガウス積分を用いたが，NURBS は非一様の有理多項式であるため必要な積分点数を検討した．そこで，ξ 方向 2 要素と 16 要素の 2 パターンのメッシュを用いて，積分点の数を 2~8 まで変えて，自由端鉛直変位の値の変化を見た．その結果を **Table 1** に示す．

実際は倍精度計算であるが，**Table 1** には有効桁 7 桁までの値を示した．有効桁 7 桁の範囲では，2 要素の場合 2 次，3 次のとき 6 点以上，4 次のとき 7 点以上で値が収束した．一方，16 要素の場合 2 次，3 次のとき 4 点以上，4 次の場合 5 点以上で値が収束した．これは，2 要素よりも 16 要素の方が，解析モデルの形状を制御するコントロールポイントの数が多く，重みの値が 1 に近い制御点が多いためと考えられる．以上の結果から，次節の検討では積分点数を 2 次，3 次のとき 6 点，4 次のとき 7 点とした．

3.3　NURBS ソリッド要素の収束率評価

自由端鉛直変位の解析結果を参照解と比較した．参照解には解析メッシュの中で次数と要素数がともに最大となる ξ 方向 32 要素 4 次の解析解を用いた．相対誤差は参照解と解析解の差を参照解で除して算出した．自由端鉛直変位の参照解との比較を **Figure 3** に示す．

相対誤差は，2 次，3 次，4 次ともに要素長の約 2 乗に比例して減少するという結果が得られた．3 次(4 次)の NURBS では，2 次(3 次)の NURBS で必要となる要素数の半分の要素で同程度の精度が得ることができた．

4.　まとめ

本研究では，曲がりばりを対象としたアイソジオメトリック解析において，ガウス積分点数の検討と NURBS ソリッド要素の収束率評価を行った．その結果，NURBS 要素に対する積分点数は通常の多項式に対する積分点数よりも多く必要であること，自由端鉛直変位に着目した結果，次数が 1 つ増えると必要な要素数は半分で済むことが分かった．

参考文献

[1] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, Y. Bazilevs：Isogeometric Analysis -Toward Integration of CAD and FEA-,　Wiley, 2009.

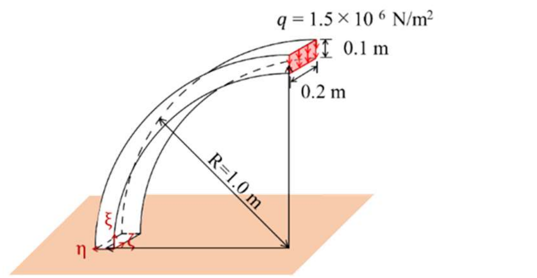

Figure1.　Computational model and boundary conditions

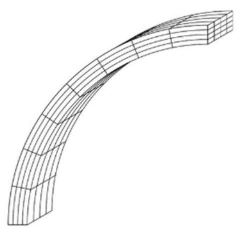

Figure 2.　Mesh (8 elements in ξ direction)

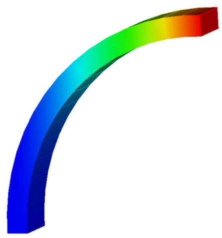

Figure 3.　Vertical displacement distribution

Table 1.　Relationship between the number of Integral points and the vertical displacement at the free end

Integral points	Vertical displacement at the free end [$\times 10^{-3}$ m]					
	2 elements			16 elements		
	Degree 2	Degree 3	Degree 4	Degree 2	Degree 3	Degree 4
2				6.687099	6.704823	6.714937
3	1.359276	6.173085	6.937710	6.677817	6.693170	6.698612
4	1.377276	6.053916	6.579516	6.677818	6.692919	6.696493
5	1.377097	6.055600	6.573682	6.677818	6.692919	6.696474
6	1.377098	6.055581	6.573847	6.677818	6.692919	6.696474
7	1.377098	6.055581	6.573844	6.677818	6.692919	6.696474
8	1.377098	6.055581	6.573844	6.677818	6.692919	6.696474

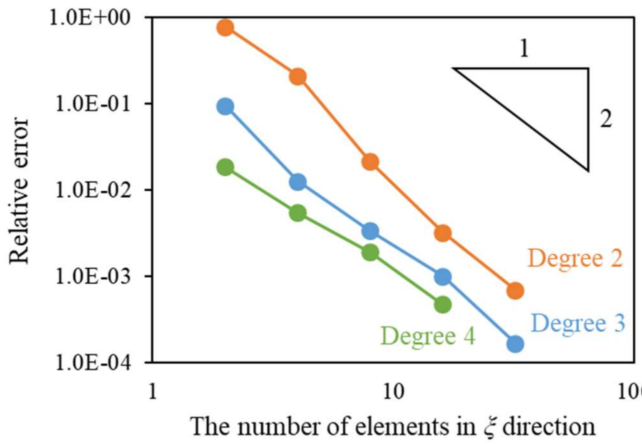

Figure 3.　Comparison of the vertical displacement at the free end and a reference solution