J-48

フーリエスペクトルとインパルス応答関数を用いた時刻歴応答計算方法
Time-History Response Calculation Method Using Fourier Spectrum or Impulse Response Function

○佐野敦紀[1]，　居駒知樹[2]，　相田康洋[2]
*Atsuki Sano[1], Tomoki Ikoma[2], Yasuhiro Aida[2]

Abstract: In the time history motion response calculation of floating structures, if the motion response is linear, the result of the time history can be obtained directly from the frequency response function. If there is significant influence on motion due to nonlinearity of the mooring system or damping, it is necessary to successively solve the motion equation. In that case, as a method of calculating the time-history wave exciting force, there is a method using the Fourier spectrum of the incident wave or impulse response function. From the convolved theorem, the results of both are equivalent. In this paper, the results of the calculations are shown and proved to be a match.

１．はじめに

時間領域での浮体構造物の運動方程式は，ダンピングのインパルス応答関数であるメモリー影響関数（第 2 項）を適用するとき，(1)のように表現できる．

$$(M+a)\ddot{x}(t)+\int_{-\infty}^{t}K(t-\tau)\,\dot{x}(t)d\tau+Cx(t)=F(t) \qquad (1)$$

時刻歴波強制力 $F(t)$の計算方法として，入射波のフーリエスペクトルまたはインパルス応答関数を用いた方法がある．本稿では，この 2 つの方法で規則波による波強制力を計算し，両者の結果は一致することを示した．

２．インパルス応答関数

インパルス応答関数は周波数応答関数のフーリエ逆変換によって(2)のように求められる．

$$h(\tau)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega\right] \qquad (2)$$

インパルス応答関数を用いた時刻歴の出力は，以下のように求められ，(3)中のどちらの表示でも得られる結果は同じである。

$$\begin{aligned} f(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\eta(t-\tau)\,d\tau \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\eta(\tau)\,d\tau \end{aligned} \qquad (3)$$

ここで，周波数応答関数作成時の時間項定義に注意が必要となる。(2)中の$H(\omega)$が時間項$+i\omega t$として定義した計算で求められたとして，$-i\omega t$で定義されたときの応答関数を$H^*(\omega)$とする．$H^*(\omega)$は，$H(\omega)$の複素共役であり，両者に同じく(2)の操作を行うことは，正しくない．

$$\begin{aligned} h(\tau)&=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega\right] \\ &\neq \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H^*(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega\right] \end{aligned} \qquad (4)$$

(4)によって得られたインパルス応答関数は **Figure.1** に示すように，それぞれ左右逆になる．これは，Sine 成分の反対称性による虚数部の符号の違いから生じる．周波数応答関数を **Figure.2** に示す．

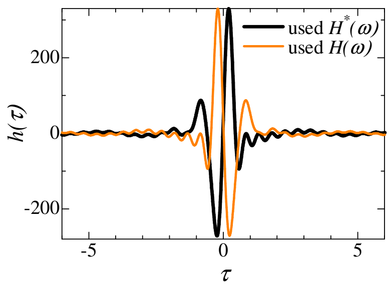

Figure.1 Impulse response function $h(\tau)$

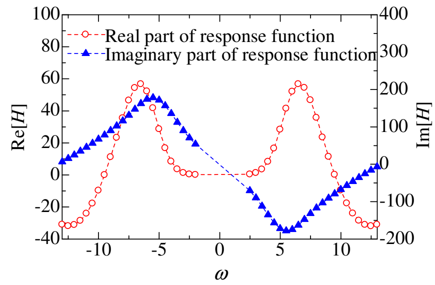

Figure.2 Response function

こうした時間項の定義の違いから，$H^*(\omega)$を用いてインパルス応答関数を求める際には，(5)計算が必要となる．(5)の結果は(2)で求めた結果と一致する．

$$\begin{aligned} h(\tau)&=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H^*(\omega)e^{i(-\omega)\tau}\,d\omega\right] \\ &=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H^*(-\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega\right] \end{aligned} \qquad (5)$$

１：日大理工・院（前）・海建　２：日大理工・教員・海建

３．畳み込み定理

フーリエ係数を用いる方法も手法は同じく，表記と実際に時系列結果を作成する際の手順が異なるだけである．それは入射波のフーリエスペクトルを$a(\omega)$として(6)で表現できる．

$$f(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H^*(\omega)\cdot a(\omega)e^{i(-\omega)t}\,d\omega\right] \tag{6}$$

最終的な結果が等しくなることは，畳み込み定理からも確認できる．

合成積（畳み込み積分）をフーリエ変換したものとフーリエ変換したものの積は等しいという関係は，畳み込み定理と呼ばれ，(7)のように表される．

$$\mathcal{F}[h*\eta] = \mathcal{F}[h]\cdot\mathcal{F}[\eta] \tag{7}$$

さらに，hとηのフーリエ変換後が$H^*(\omega)$および$a(\omega)$であるので，(7)を(8)のように式変形させると(3)のインパルス応答関数を用いる方法と入射波のフーリエスペクトルを用いて得る結果は，等しいと分かる．

$$\begin{gathered}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\eta(t-\tau)\,d\tau\right] = H^*(\omega)\cdot a(\omega)\\ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\eta(t-\tau)\,d\tau = \mathcal{F}^{-1}[H^*(\omega)\cdot a(\omega)]\end{gathered} \tag{8}$$

４．波強制力計算結果

入射波を，

$$\eta(t) = \mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] \tag{9}$$

として，円周波数$\omega = 3.0$ および 8.0(rad/sec)での計算結果を **Figure .2 ,3** に示す．結果は，(2),(5)から求めたインパルス応答関数を用いて(3)の計算をしたものと応答関数とフーリエ係数の積をフーリエ逆変換する(6)の計算をしたものである．時間項を適切に考慮した場合に，２つの方法で計算結果は一致する．

周波数応答の位相差が小さい程，**Figure .2 ,3** の結果のずれは小さくなり，位相差が全く生じていなければ Sine 成分の影響がないため，これまで述べてきた時間項の問題は結果的には生じない．

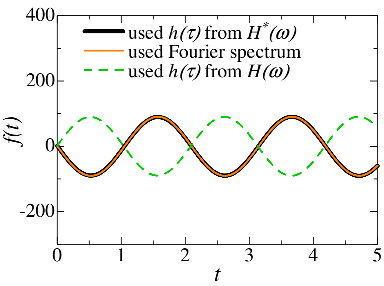

Figure.3 Time series of response, $\omega = 3.0$ rad/sec

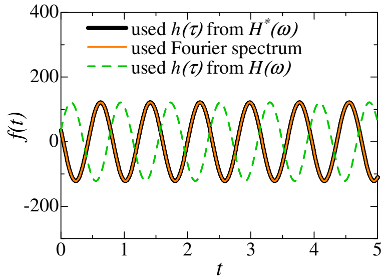

Figure.4 Time series of response, $\omega = 8.0$ rad/sec

５．非線形応答

ここまで線形応答のみを考えてきたが， n 次周波数応答関数が得られ，そのフーリエ変換が成立すれば，同様にインパルス応答関数と時系列の入力データの畳み込みによって，n 次まで考慮した時刻歴応答も求めることができる．入力が不規則波であっても問題はない．一般に入力$X(t)$にとして，非線形応答$Y(t)$は

$$\begin{aligned}Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t-\tau_1,\cdots,t\\ -\tau_n)X(\tau_1)\cdots X(\tau_n)\,d\tau_1\cdots d\tau_n\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&h_n(\tau_1,\cdots,\tau_n)\\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)\right.\\ &\qquad\left. e^{(i\omega_1\tau_1+\cdots+i\omega_n\tau_n)}d\omega_1\cdots d\omega_n\right]\end{aligned} \tag{11}$$

フーリエスペクトルを用いた方法では，考慮する次数に応じてフーリエ逆変換を繰り返す．２次までを考慮すれば以下のように表現できる．

$$\begin{aligned}Y(t) = \mathrm{Re}&\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a(\omega)H_1(\omega)e^{i\omega t}\right.\\ &+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\omega_i)a(\omega_j)H_2(\omega_i,\omega_j)\\ &\left. e^{(i\omega_i t+i\omega_i t)}d\omega_i d\omega_j\right]\end{aligned} \tag{12}$$

６．おわりに

時刻歴応答の計算方法として，フーリエスペクトルまたはインパルス応答関数を用いた方法とその際の注意点について示し，両者の結果が良く一致することを計算結果とともに証明した．

７．参考文献

[1] 柏木正，岩下英嗣：「船体運動 耐航性能編（船舶海洋工学シリーズ ④)」，成山堂，2012 年