

## Galleyの変分原理における拘束条件の考察

## A study of a constraint condition imposed on Galley's variational principle

○大嶋柗<sup>1</sup>, 鈴木隆史<sup>2</sup>, 藤原侑樹<sup>3</sup>, 出口真一<sup>4</sup>\*Shu Oshima<sup>1</sup>, Takafumi Suzuki<sup>2</sup>, Yuki Fujiwara<sup>3</sup>, Shinichi Deguchi<sup>4</sup>

Abstract : We study analytical mechanics and canonical quantization of the damped harmonic oscillator on the basis of a modified Lagrangian including a physical limit condition.

## 1. 導入

Galley は, 通常の変分原理では散逸系を正しく記述できないことを指摘し, それに代わる散逸系も記述できるような変分原理を提唱した [1]. この変分原理では力学変数を倍加し, 計算の最終段階において物理的極限と呼ばれる要請をおき, 自由度を元に戻す.

本研究では, Galley による散逸系の古典論を量子論に移行できるように, 物理的極限の要請 (拘束条件) を古典論のラグランジアンで組み込む. その後, 散逸系の量子論における物理的極限を導く. 特に, 今回はこの過程を一次元減衰調和振動子系に対して適用し, 議論を進める.

## 2. Galley の変分原理

$N$  個の一般座標  $q_i$  と一般速度  $\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}$  を持ち, ラグランジアンが  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  であるような力学系に対して Galley の変分原理は以下のように定式化される [1].

まず, 一般座標を  $q_i \rightarrow (q_{i1}, q_{i2})$  と倍加し, それに伴って一般速度も  $\dot{q}_i \rightarrow (\dot{q}_{i1}, \dot{q}_{i2})$  のように倍加する. このとき, 作用は

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \Lambda, \quad \Lambda \equiv L(q_{i1}, \dot{q}_{i1}, t) - L(q_{i2}, \dot{q}_{i2}, t) + K(q_{i1}, \dot{q}_{i1}, q_{i2}, \dot{q}_{i2}, t) \quad (1)$$

であるとする. ただし,  $K(q_{i1}, \dot{q}_{i1}, q_{i2}, \dot{q}_{i2}, t)$  は, 非保存力を与えるポテンシャルである. 次に, 初期時刻においては, 通常の変分原理と同様に座標を固定する条件

$$\delta q_{i1}(t_i) = \delta q_{i2}(t_i) = 0 \quad (2)$$

を課し, 一方で, 終時刻においては次の等価条件を課す.

$$q_{i1}(t_f) = q_{i2}(t_f), \quad \dot{q}_{i1}(t_f) = \dot{q}_{i2}(t_f). \quad (3)$$

作用 (1) を変分して, 初期条件 (2) と等価条件 (3) を用いることで  $\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^N [\delta q_{i1} (\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{i1}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{i1}}) + \delta q_{i2} (\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{i2}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{i2}})]$  が得られる. 変分  $\delta q_{i1}$  と  $\delta q_{i2}$  は任意であるため, ハミルトンの原理  $\delta S = 0$  から運動方程式

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{i1}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{i1}} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{i2}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{i2}} = 0 \quad (4)$$

が導かれる. 最後に, 物理的極限と呼ばれる条件

$$q_{i1}(t) = q_{i2}(t) \quad (5)$$

を課すことにより, 運動方程式 (4) は

$$\left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{i1}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_{i1}} \right]_{q_{i1}=q_{i2}} = 0 \quad (6)$$

のように1つになる [1].

## 3. 物理的極限を取り入れた作用

Galley の変分原理では, 計算の最終段階で物理的極限 (5) を要請した. 本研究では, 量子論への移行を考慮に入れて, ラグランジアンで物理的極限 (5) を組み込む. このとき, 作用 (1) は

$$\tilde{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt \tilde{\Lambda}, \quad \tilde{\Lambda} \equiv \Lambda + \lambda \sum_{i=1}^N (q_{i1} - q_{i2})^2 \quad (7)$$

と修正される. ここで,  $\lambda$  はラグランジュ未定係数である. この作用の変分をとって, 初期条件 (2) と等価条件 (3) を課すことで,  $\delta \tilde{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^N [\delta q_{i1} \{ \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial q_{i1}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{q}_{i1}} + 2\lambda(q_{i1} - q_{i2}) \} + \delta q_{i2} \{ \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial q_{i2}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{q}_{i2}} - 2\lambda(q_{i1} - q_{i2}) \} + \delta \lambda (q_{i1} - q_{i2})^2]$  が得られる. 変分  $\delta q_{i1}, \delta q_{i2}, \delta \lambda$  は任意であるため, 運動方程式

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial q_{i1}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{q}_{i1}} = -2\lambda(q_{i1} - q_{i2}), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial q_{i2}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{q}_{i2}} = 2\lambda(q_{i1} - q_{i2}), \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^N (q_{i1} - q_{i2})^2 = 0 \quad (10)$$

が導かれる. 式 (10) は  $q_{i1} - q_{i2} = 0$  を意味するから物理的極限 (5) と等価である. 式 (5) を式 (8) と式 (9) に代入すると, 式 (6) が得られるため, 修正された作用 (7) は, 物理的極限を組み込んでおり, Galley が得た結果を再現することがわかる.

## 4. 減衰調和振動子の正準形式

ここでは, 具体例として一次元減衰調和振動子を考察する. そのラグランジアンは, 式 (7) の特殊な場合として次のように与えられる.

$$\tilde{\Lambda} = m\dot{q}_+ \dot{q}_- - m\omega^2 q_+ q_- - \frac{\gamma}{2} (\dot{q}_+ q_- - q_+ \dot{q}_-) + \lambda q_-^2. \quad (11)$$

<sup>1</sup> 日大理工・院 (前)・量子 <sup>2</sup> 日大・研究員・量科研 <sup>3</sup> 日大・研究員・量科研 <sup>4</sup> 日大・教員・量科研

ここで、変数  $q_+$  と  $q_-$  は  $q_+ \equiv \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ ,  $q_- \equiv q_1 - q_2$  のように定義される。ただし、 $m$  は振動子の質量、 $\omega$  は角振動数、 $\gamma$  は抵抗係数である。また、ラグランジアン (11) は、 $\lambda = 0$  のときに Bateman が 1931 年に与えたラグランジアンに一致し、減衰調和振動子と増幅調和振動子の両方を対等に記述する [2]。作用 (7) にラグランジアン (11) を代入して、変分をとり初期条件 (2) と等価条件 (3) を課すことで  $\delta\tilde{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt [\delta q_- (-m\ddot{q}_+ - \gamma\dot{q}_+ - m\omega^2 q_+ + 2\lambda q_-) + \delta q_+ (-m\ddot{q}_- + \gamma\dot{q}_- - m\omega^2 q_-) + \delta\lambda q^2]$  が得られる。変分  $\delta q_+$ ,  $\delta q_-$ ,  $\delta\lambda$  は任意であるため、ハミルトンの原理  $\delta\tilde{S} = 0$  から運動方程式

$$m\ddot{q}_+ + \gamma\dot{q}_+ + m\omega^2 q_+ = 2\lambda q_-, \quad (12a)$$

$$m\ddot{q}_- - \gamma\dot{q}_- + m\omega^2 q_- = 0, \quad (12b)$$

$$q_-^2 = 0 \quad (12c)$$

が得られる。式 (12c) は物理的極限

$$q_- = 0 \quad (13)$$

すなわち  $q_1 = q_2$  を与える。これを増幅調和振動子の運動方程式 (12b) に代入すると式 (12b) は  $0 = 0$  となり、意味をなさない。一方で、運動方程式 (12a) に式 (13) を代入すると、減衰調和振動子の運動方程式  $m\ddot{q}_+ + \gamma\dot{q}_+ + m\omega^2 q_+ = 0$  が得られる。したがって、ラグランジアン (11) は減衰調和振動子のみを記述しており、物理的極限 (13) を組み込んでいることがわかる。

正準運動量は  $p_+ \equiv \frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial\dot{q}_+} = m\dot{q}_+ + \frac{\gamma}{2}q_+$ ,  $p_- \equiv \frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial\dot{q}_-} = m\dot{q}_- - \frac{\gamma}{2}q_-$ ,  $p_\lambda \equiv \frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial\lambda} = 0$  のように得られる。最後の式は拘束条件  $\phi \equiv p_\lambda \approx 0$  になる。ただし、 $\approx$  は弱等号と呼ばれ、ポアソン括弧内では用いることができないことを表している。正準ハミルトニアンは  $\Theta_C \equiv \dot{q}_- p_+ + \dot{q}_+ p_- + \dot{\lambda} p_\lambda - \tilde{\Lambda} = \frac{1}{m}p_- p_+ + \frac{\gamma}{2m}(p_+ q_- - p_- q_+) + m(\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2})q_+ q_- - \lambda q_-^2$  と得られて、全ハミルトニアンは  $\Theta_T \equiv \Theta_C + u\phi$  と定義される。ただし、 $u$  は拘束条件に対応するラグランジュ未定係数である。ここで、ポアソン括弧は  $\{q_+, p_-\}_{PB} = 1$ ,  $\{q_-, p_+\}_{PB} = 1$ ,  $\{\lambda, p_\lambda\}_{PB} = 1$  と定義される。ただし、それ以外のポアソン括弧は 0 である。拘束条件  $\phi \approx 0$  は時間発展の下で変化しないという要請 (整合性の条件) より、 $\dot{\phi} = \{\phi, \Theta_T\}_{PB} = q_-^2 \approx 0$  が得られて、これは新たな拘束条件  $\chi_1 \equiv q_-^2 \approx 0$  になる。同様の操作を繰り返すことで、次の拘束条件が得られる。

$$\phi \equiv p_\lambda \approx 0, \quad (14a)$$

$$\chi_1 \equiv q_-^2 \approx 0, \quad (14b)$$

$$\chi_2 \equiv \frac{2}{m}q_- p_- \approx 0, \quad (14c)$$

$$\chi_3 \equiv \frac{2}{m^2}p_-^2 \approx 0. \quad (14d)$$

これらの拘束条件は、第一類拘束条件に分類される。

## 5. 減衰調和振動子の正準量子化

ディラックの手法にしたがって、正準変数を  $(q_-, p_+) \rightarrow (\hat{q}_-, \hat{p}_+)$ ,  $(q_+, p_-) \rightarrow (\hat{q}_+, \hat{p}_-)$ ,  $(\lambda, p_\lambda) \rightarrow (\hat{\lambda}, \hat{p}_\lambda)$  のように演算子に置き換えて、これらに対して適切な交換関係を設定する。正準量子化において、拘束条件 (14) は次のように物理的状態  $|\Psi\rangle$  の定義となる。

$$\hat{\phi}|\Psi\rangle \equiv \hat{p}_\lambda|\Psi\rangle = 0, \quad (15a)$$

$$\hat{\chi}_1|\Psi\rangle \equiv \hat{q}_- \hat{q}_- |\Psi\rangle = 0, \quad (15b)$$

$$\hat{\chi}_2|\Psi\rangle \equiv \frac{2}{m} \hat{q}_- \hat{p}_- |\Psi\rangle = 0, \quad (15c)$$

$$\hat{\chi}_3|\Psi\rangle \equiv \frac{2}{m^2} \hat{p}_- \hat{p}_- |\Psi\rangle = 0. \quad (15d)$$

式 (15b) の左から物理的状態  $|\Psi\rangle$  の共役  $\langle\Psi|$  をかけると、式 (15b) は  $\langle\Psi|\hat{q}_- \hat{q}_- |\Psi\rangle = 0$  になる。これに内積の正定値性と  $\hat{q}_-$  がエルミート演算子であることを適用すると、 $\hat{q}_- |\Psi\rangle = 0$  が求まる。この式は物理的極限 (13) に対応していることがわかる。式 (15d) に同様の操作を施すと、 $\hat{p}_- |\Psi\rangle = 0$  が得られる。以上のように、量子論における物理的極限は

$$\hat{q}_- |\Psi\rangle = 0, \quad (16a)$$

$$\hat{p}_- |\Psi\rangle = 0 \quad (16b)$$

のような物理的状態を規定する条件であることがわかった。

## 6. まとめと今後の課題

Galley の変分原理における物理的極限をラグランジアンの段階で組み込み、修正された作用 (7) を与えた。具体例として次元減衰調和振動子を考察し、量子論における物理的極限が物理的状態を規定する条件 (16) として導かれた。

今後の課題は、量子論における物理的極限 (16) は一般論でも成り立つのかを調べることである。また、本研究における物理的極限 (16) と過去の論文 [3] で与えられた量子論における物理的極限の相違を明らかにすることである。

### 参考文献

- [1] C. R. Galley, Phys. Rev. Lett. **110**, 174301 (2013).
- [2] H. Bateman, Phys. Rev. **38**, 815 (1931).
- [3] Y. Kuwahara, Y. Nakamura, Y. Yamanaka, Phys. Lett. A. **377**, 3102 (2013).