O-17

波束を用いたニュートリノ振動
Neutrino oscillation by wave packet

〇山田彰[1], 二瓶武史[2]
Akira Yamada[1], Takeshi Nihei[2]

Abstract:通常フレーバー間のニュートリノ振動を記述する遷移確率を導出する際, 平面波を用いて解析を行うのだが, その解析で使用されるニュートリノの運動量が一定という仮定は, 不確定性関係の観点において問題があることが知られている. そこですでに研究されているニュートリノとニュートリノの生成源 (荷電パイオン π^+) も含めた 2 つの場合での波束を用いた考察から, ニュートリノが平面波であると近似できる条件を確認する. その結果, よく知られている位置の不確定さが振動長よりも小さくなければいけないことや, π^+ が相対論的な場合でもニュートリノの運動量が 283GeV 以下なら平面波であるという近似が使えることが確認出来た.

1.　はじめに

ニュートリノ振動とは, 伝播する過程で 3 種類のニュートリノのフレーバー (ν_e, ν_μ, ν_τ) が変化する現象のことをいう. この現象は近年日本の Super-Kamiokande で検出され, ニュートリノに質量があることが確認された. このことから, ニュートリノの質量を 0 と仮定している標準模型を拡張する必要があることが知られている.

平面波を用いた通常の解析では, ニュートリノの運動量 P を一定と仮定して遷移確率を導出している. しかし運動量が一定（つまり運動量の不確定さ σ_P が 0 に近づく）だとすると, 位置の不確定さ σ_x ($\sim \frac{1}{\sigma_P}$) が大きくなり, 振動長 $L_{\rm osc}$（ニュートリノが元のフレーバーに戻るまでに進む距離）より大きくなってしまうと振動が均されてしまうことが知られている [1]. しかし波束を用いることで, この問題を解決でき, より一般的なニュートリノ振動を記述することが出来る.[2, 3]

本研究では, すでに研究されているニュートリノに予め用意しておいた波束を持たせた場合とニュートリノの生成を考慮に入れた場合でのニュートリノ振動の解析を行う. 更に文献 [3] でされていなかった荷電パイオン π^+ が相対論的な場合での解析も行う.

2.　平面波を用いたニュートリノ振動の導出

フレーバー状態は

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_j U_{\alpha j} \exp(iP_j x - iE_j t)\,|\nu_j\rangle \tag{1}$$

(U はユニタリー行列で PMNS 行列と呼ばれている) となり, $|\nu_\alpha\rangle$ はフレーバー固有状態 ($\alpha = e, \mu, \tau$), $|\nu_j\rangle$ は質量固有状態 ($j = 1, 2, 3$) を表している. ここで, $P =$ 一定と $x \approx t, E_j \approx P + \frac{m_j^2}{2P}$ の近似 (x と t は生成地点からの距離と時刻, E_j はニュートリノのエネルギー, m_j はニュートリノの質量) を用いるとフレーバー遷移確率 $P_{\alpha\to\beta}$ は

$$P_{\alpha\to\beta} = \sum_j U_{\beta j}^2 U_{\alpha j}^2 + \sum_{j\neq j'} U_{\beta j}^* U_{\alpha j} U_{\beta j'} U_{\alpha j'}^* \cos\left(\frac{|m_j^2 - m_{j'}^2|}{2P} x\right) \tag{2}$$

となる [2]. ここで振動に寄与する cos の項が, 最大になるまでの長さを振動長と定義すると

$$L_{\rm osc} = 2\pi \frac{2P}{|m_j^2 - m_{j'}^2|} \tag{3}$$

と表せる.

3.　波束を用いたニュートリノ振動

次のような Gauss 型の波束 [2]

$$\psi_j(x,t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_x)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[i(P_j x - E_j t) - \frac{(x - {\rm v_j} t)^2}{4\sigma_x^2}\right] \tag{4}$$

(${\rm v_j}= \frac{P_j}{E_j}$) を用いると, $\nu_e \to \nu_\mu$ へのフレーバー遷移確率は

$$P_{\nu_e\to\nu_\mu} = 2\sin^2\theta\cos^2\theta \left\{1 - \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2P} x\right) \times \exp\left[-\frac{x^2}{8\sigma_x^2}\left(\frac{\Delta m^2}{2P^2}\right)^2 - (1+\kappa)^2 \frac{(\Delta m^2)^2}{32\sigma_P^2 P^2}\right]\right\} \tag{5}$$

（$\sigma_P = \frac{1}{2\sigma_x}, \Delta m^2 = |m_2^2 - m_1^2|, \kappa = \frac{P_1^2 - P_2^2}{\Delta m^2}, P = \frac{P_1 + P_2}{2}$）となる [2]. ここで (5) 式より指数の肩が 0 に近づけば平面波と同様な遷移確率になる為,

$$\sigma_P \gg \frac{\Delta m^2}{P} \tag{6}$$

$$\frac{x^2}{8\sigma_x^2}\left(\frac{\Delta m^2}{2P^2}\right)^2 \ll 1 \tag{7}$$

[1] 日大理工・院 (前)・物理
[2] 日大理工・教員・物理

の 2 つの条件満たせば良いことになる． (6) 式の条件は, 右辺が (3) 式より $\frac{1}{L_{\rm osc}}$ 程度の大きさであることから $\sigma_x \ll L_{\rm osc}$ を表している. (7) 式の条件は, 変形すると

$$x \ll \frac{\sigma_x}{|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2|} \sim (\sigma_x P)L_{\rm osc} \tag{8}$$

となり ($\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ は各質量固有状態での速度, x は振動可能な距離), これは波束の分離が起きない為の条件を表している. また（8）式において σ_x がマクロな値であるとすると, 分離が起きるためには非常に長い距離を振動しなければいけない（P が 1GeV の時, σ_x が 10^{-16}m で $(\sigma_x P) \sim 1$ になる）ことになる.

次にニュートリノの生成 $(\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu)$ を考慮に入れた場合について考える [3]. ニュートリノの状態を

$$|\nu_\alpha(x,t)\rangle = \int_{P-\frac{1}{2L_{\rm osc}}}^{P+\frac{1}{2L_{\rm osc}}} dP' \sum_j U_{\alpha j} a(P_\pi^j(P')) \exp\left(-i\frac{m_j^2}{2P'}t\right)|\nu_j\rangle \tag{9}$$

（a はπ^+ の振幅, P_π^j は π^+ の運動量）とおき, 積分範囲が非常に狭いことから位相がほぼ変わらないとすると

$$|\nu_\alpha(t)\rangle \simeq \sum_j U_{\alpha j} \exp\left(-i\frac{m_j^2}{2P}t\right)|\nu_j\rangle\, g_j \tag{10}$$

$$g_j = \int_{P-\frac{1}{2L_{\rm osc}}}^{P+\frac{1}{2L_{\rm osc}}} dP' a(P_\pi^j(P')) \tag{11}$$

と書ける．ここで g_j が j に依らない (つまり定数である) とすれば, (10) 式を用いて導出した遷移確率は, 平面波でのものに比例した形になる為, g_j が j に依らない為の条件

$$|P_\pi^j(P_\nu) - P_\pi^{j'}(P_\nu)| \ll \frac{1}{\sigma_x} \tag{12}$$

を満たせているかがニュートリノの生成を考える上で問題になる [3]. 文献 [3] では π^+ が非相対論的な場合では (12) 式の条件を満たせていることが説明されている為, 以下では π^+ が相対論的な場合に (12) 式の条件を満たしているかを考察していく．π^+ が静止系から運動量 P_π^m をもつ系へのローレンツ変換は次のようになる.

$$\begin{aligned} P_\nu &= \gamma\left(P_j^* + \beta E_j^*\right) \\ E_\nu &= \gamma\left(E_j^* + \beta E_j^*\right) \end{aligned} \tag{13}$$

ここで, P_j^*, E_j^* は π^+ の静止系でのニュートリノの運動量とエネルギー, $\beta = \frac{P_\pi}{\sqrt{P_\pi^2+M_\pi^2}}, \gamma = \frac{1}{1-\beta^2}$ である. (13) 式より π^+ の運動量 P_π^j は

$$P_\pi^j = \frac{E_j^* P_\nu \mp P_j^* E_\nu}{m_j^2} M_\pi \tag{14}$$

となる. ここで, M_π は π^+ の質量である. (14) 式より

$$\frac{dP_\pi^j}{dm_j^2} = -\frac{1}{4P_\nu} - \frac{P_\nu}{4(P_j^*)^2} + \frac{M_\pi}{4P_j^* P_\nu} + \frac{P_j^*}{4P_\nu^3}M_\pi - \frac{m_j^2}{4(P_j^*)^2 P_\nu} \tag{15}$$

となる. ここで, π^+ が相対論的であることから M_π, m_j^2 が運動量 P_ν に比べて小さいとすると

$$|P_\pi^j(P_\nu) - P_\pi^{j'}(P_\nu)| \simeq \frac{1}{4P_\nu}\left(1 + \frac{P_\nu^2}{(P_j^*)^2}\right)|m_j^2 - m_{j'}^2| \tag{16}$$

と書き表せる. しかし, (16) 式より P_ν が大きくなり過ぎてしまうと, (12) 式の条件を満たさなくなる可能性がある. そこで P_ν の上限値を求める為に (3), (12) 式を用いて (16) 式を変形すると

$$\sigma_x \ll \frac{\left(P_j^*\right)^2}{P_\nu^2} L_{\rm osc} \tag{17}$$

書ける．ここで π^+ が崩壊するまでに進む距離を σ_x とすると, 実際の実験において π^+ の生成地点から約 100m 程度の所にハドロン吸収体がある為, それ以上先には進めない．その為 σ_x を 100m とし (17) 式に代入すると, $P_\nu \ll 283$GeV となれば不等式を満たすことになり, π^+ が相対論的な場合においても (12) 式の条件を満たすことになる.

4. まとめと今後の展望

本研究では, 波束を用いた方法としてすでに研究されているニュートリノに予め用意しておいた波束を使用する場合とニュートリノの生成を考慮に入れた場合の 2 つのパターンを用いてニュートリノ振動の解析を行った. 結果前者の場合では, 平面波のような遷移確率になる為の条件から, 1 つは $\sigma_x \ll L_{\rm osc}$ を満たさなければいけないこと, もう 1 つの条件から非常に長い距離を振動すると波束の分離が起きることを確認した [2]. また後者の場合では, 文献 [3] での π^+ が非相対論的な場合の考察を参考に, π^+ が相対論的な場合での考察を行い, ニュートリノの運動量に上限があることを示した.

今後は, 考慮していなかったニュートリノの検出過程や, 生成や検出における相互作用を加味した場の量子論での遷移確率の導出のレビューを検討している [1].

5. 参考文献

[1] M. Beuthe, Phys. Rept. 375 (2003) 105-218 .

[2] C. Giunti and C. W. Kim, U. W. Lee, Phys. Rev. D44 (1991) 11.

[3] B. Kayser, Phys. Rev. D24 (1981) 1.