O-19

グラディエントフローによるバウンス解の決定について
On derivation of bounce solution by using gradient flow

○丸山賢人[1], 三輪光嗣 [2]
*Kento Maruyama[1], Akitsugu Miwa[2]

Abstract: We review derivations of bounce solutions using gradient flow equation which are proposed by Chigusa-Moroi-Shoji and also by Sato recently. The probability of collapse of an unstable false vacuum can be calculated using the path integral, and the leading contribution to this integral comes from bounce solutions. The minimum point of the functional can be obtained by using the gradient flow, but this method cannot be simply applied because the bounce solution is a saddle point. The works mentioned above propose solutions to the difficulty.

1.　はじめに

宇宙の状態が最低エネルギーの固有状態ではなく, 偽真空と呼ばれる不安定な状態であった場合, この状態はより安定な状態へと崩壊する. その際の崩壊率は, 時間をユークリッド化した場の理論の経路積分を用いて計算することができる. この計算を近似的に実行する際に重要な役割を担うのが『バウンス』と呼ばれる古典解である. 本講演ではグラディエントフローと呼ばれる手法を用いてバウンス解を求めた参考文献 [1][2] についてレビューを行う.

2.　偽真空

まず, 作用が次式で与えらえる実スカラー場の理論を用いて偽真空とバウンスについて簡単にまとめる.

$$S[\phi] = \int d^D x[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + V(\phi)] \tag{1}$$

ポテンシャル $V(\phi)$ は Fig.1 の左の図のように二つの極小点をもっており, それらの点におけるポテンシャルの高さは異なっているとする. $V(\phi) = 0$ となる点と $V(\phi)$ が負になるような点の二つである. これらの極小点はポテンシャルの山によって隔てられており, 相対的に大きなポテンシャルを持つ $V(\phi) = 0$ の状態も古典的には安定な状態である. しかしながら, 量子論においてはトンネル効果によって他方の極小点への遷移がおこるため, $V(\phi) = 0$ の状態は不安定な状態となる. このような不安定な状態のことを偽真空と呼ぶ.

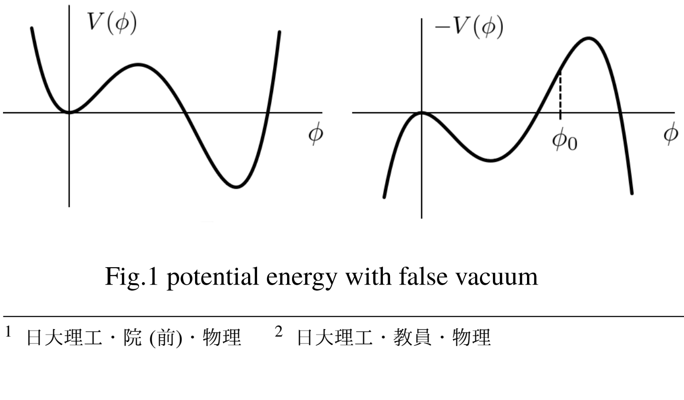

Fig.1 potential energy with false vacuum

3.　バウンスとは

偽真空の崩壊率の計算は以下の経路積分に基づく.

$$\int D\phi e^{-S[\phi]} \tag{2}$$

この経路積分において主要な寄与を持つ古典解が『バウンス』と呼ばれる解である. この解はユークリッド空間の動径座標 r のみに依存する解であり, 以下の運動方程式を満たす.

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = V'(\phi) - \frac{D-1}{r}\frac{d\phi}{dr} \tag{3}$$

この方程式は r を時間とみなすと,Fig.1 の右の図のようにポテンシャルを $-V(\phi)$ の下で運動する粒子の運動方程式とみなすことができる. $D \geq 2$ の場合は減衰項が生じる. この方程式の解のうち,$r = 0$ において図の ϕ_0 から初速度ゼロで谷を滑り始め,$r \to \infty$ において $-V(\phi) = 0$ の丘の上で静止する解がバウンス解と呼ばれる. ここでは経路積分 (2) に対するシングルバウンスとその周りの揺らぎの寄与を議論する. バウンス $\bar{\phi}$ 周りの ϕ は $\delta\phi$ を揺らぎとして,$\phi = \bar{\phi} + \delta\phi$ と書ける. 揺らぎに関して作用を展開し, 二次の項まで拾うと以下の式が得られる.

$$S[\bar{\phi} + \delta\phi] = S[\bar{\phi}] + \int d^D x \frac{1}{2}\delta\phi[M]\delta\phi \tag{4}$$

$$M = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{D-1}{r}\frac{d}{dr} + V''(\bar{\phi}) \tag{5}$$

揺らぎ $\delta\phi$ は演算子 M の固有関数 χ_n を用いて, 以下の式で表すことができる.

$$\delta\phi = \sum_n a_n\chi_n (M\chi_n = \lambda_n\chi_n, n = -1, 1, 2, \cdots) \tag{6}$$

演算子 M には, 負の固有値が一つあり, これを λ_{-1} とする. 以上のことを用いて, 式 (2) の積分は以下のように書き直すことができる.

$$\int D\phi e^{-S[\bar{\phi}+\delta\phi]} = e^{-S[\bar{\phi}]}\int \Pi_n da_n e^{-\sum_n \frac{a_n^2}{2}\lambda_n} \tag{7}$$

固有値 λ_n がすべて正ならガウス積分によって有限の値を得ることができるが, バウンスには負の固有値 λ_{-1} がある

[1] 日大理工・院 (前)・物理　[2] 日大理工・教員・物理

ので発散してしまう. 発散を避けるため解析接続を行うことで, 虚部を持つ結果が得られる [3][4].

$$\mathrm{Im}\int \mathrm{D}\phi \mathrm{e}^{-\mathrm{S}[\phi]} \propto \mathrm{VTe}^{-\mathrm{S}[\bar{\phi}]} \tag{8}$$

この計算より, 単位体積当たりの崩壊幅は以下のように与えられる.

$$\frac{\Gamma}{V} \propto e^{-S[\bar{\phi}]} \tag{9}$$

4.　グラディエントフローを用いたバウンス解の決定

グラディエントフローを用いた方法は, 仮想的な時間方向に場を発展させせることにより, 作用の極小を与える解を導く手法であり, 素朴には以下のフロー方程式に基づく.

$$\frac{\partial\phi(s,r)}{\partial s} = -\frac{\delta S[\phi(s,r)]}{\delta\phi(s,r)} \sim -M\delta\phi(s,r) \tag{10}$$

ただし, 最後の表式では方程式を古典解 $\bar{\phi}(r)$ の近傍で考えた. M は式 (5) で導入した演算子である. 揺らぎ $\delta\phi(s,r)$ の時間依存性は, 係数 a_n が担う.

$$\phi(s,r) - \bar{\phi}(r) = \delta\phi(s,r) = \sum_n a_n(s)\chi_n(r) \tag{11}$$

(10) 式と (11) 式および (6) 式の固有値方程式を用いると a_n に対する以下の方程式が導かれる.

$$\dot{a}_n(s) = -\lambda_n a_n(s) \tag{12}$$

このため, 全ての固有値 λ_n が正であれば, フロー方程式によって場 $\phi(s,r)$ は $s \to \infty$ において古典解 $\bar{\phi}(r)$ に収束する. しかしながら前節で触れたとおり, バウンス解まわりには負の固有値 λ_{-1} を持つ揺らぎ χ_{-1} が存在するため, この素朴な手法はそのまま適用することができない. 論文 [1][2] ではフロー方程式や最小化問題の変更を行うことで, グラディエントフローの方法を用いるバウンス解の導出に成功している. ここではこれらの論文で用いられた手法を簡単に解説する. これらの論文ではフレーバーの自由度を導入して, より一般的な議論を行っているが, ここでは簡単のため単一スカラー場の理論を用いる.

論文 [1] ではフロー方程式が以下のように変更された.

$$\frac{\partial\phi(s,r)}{\partial s} = -\frac{\delta S[\phi(s,r)]}{\delta\phi(s,r)} - \beta\int dr' r'^{D-1}\frac{\delta S[\phi(s,r')]}{\delta\phi(s,r')} g(r')g(r) \tag{13}$$

β は定数であり,$g(r)$ は $g(r) = \sum_n c_n\chi_n(r)$ のように書ける関数である. バウンス近傍での方程式（12）は以下のように変更される.

$$\dot{a}_n \simeq -\lambda_n a_n + \beta\sum_m c_n c_m \lambda_m a_m = -\sum_m \Gamma_{nm}(\beta)a_m \tag{14}$$

β や c_n を適切に選ぶことでバウンス解に収束するフロー方程式を作るというのが論文 [1] の方針である. $\Gamma_{nm}(\beta)$ は一般には対象では無い実数行列であるため, 固有値は複素数となる. 全ての固有値の実部が正であれば $s \to \infty$ の極限において $\phi(s,r)$ はバウンス解に帰着する. こうした条件や, あるいはフロー方程式がバウンス解を与えるためのより弱い条件式 $\frac{\partial}{\partial s}(\sum_n a_n^2) = -\sum_{mn} a_m(\Gamma+\Gamma^T)_{mn}a_n < 0$ 等を考慮し適切な β や c_n を設定して, 数値計算を実行することでバウンス解の導出に成功している.

一方, 論文 [2] では Coleman,Glaser,and Martin (CGM)[5] による, 作用のポテンシャル部分は負の値に固定して運動項部分を最小化する議論を利用して, 最小化問題を別の最小化問題に取り換え, フロー方程式を用いてバウンス解を導いている. 用いているフロー方程式は以下の形のものである.

$$\frac{\partial}{\partial s}\phi(s,r) = \partial_\mu\partial_\mu\phi(s,r) - \lambda[\phi(s,r)]\frac{\partial V(\phi(s,r))}{\partial\phi(s,r)} \tag{15}$$

$$\lambda[\phi] = \frac{\int drr^{D-1}V'(\phi)\partial_\mu\partial_\mu\phi}{\int drr^{D-1}V'(\phi)^2} \tag{16}$$

ここで (15),(16) 式とコーシー＝シュワルツの不等式を使うと以下の式が導かれる.

$$\frac{d}{ds}\mathcal{V}[\phi] = 0, \frac{d}{ds}\mathcal{T}[\phi] \leqq 0 \tag{17}$$

ただし,$S[\phi] = \mathcal{T}[\phi] + \mathcal{V}[\phi]$ のように作用の運動項を含む部分を $\mathcal{T}$, ポテンシャル部分を $\mathcal{V}$ とした. このため, フロー方程式によって,$\mathcal{V}$ は一定に保ち $\mathcal{T}$ を最小化する配位 ϕ が得られることになる. また, このとき,ϕ は次式を満たすことも示される.

$$\partial_\mu\partial_\mu\phi - \lambda\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = 0, (\lambda = \lim_{s\to\infty}\lambda[\phi(s,r)]) \tag{18}$$

そして, バウンス解 $\bar{\phi}(r)$ はこうして得られた配位 ϕ のスケール変換の形で得ることができる.

$$\bar{\phi}(r) = \phi(\lambda^{\frac{1}{2}}r) \tag{19}$$

5.　まとめ

偽真空の崩壊率を調べるには, 経路積分において主要な寄与となるバウンス解が必要であった. バウンスの負の固有値が積分を発散させ、素朴にフロー方程式が使えない原因であったことを説明した. グラディエントフローを改良することにより, 問題を解決しバウンス解を導出できることを紹介した. 今後はこれらの方法による数値解析についても検討したい.

参考文献

[1] S.Chigusa, T.Moroi, and Y.Shoji, Phys.Lett.B 800, 135115 (2020).

[2] Ryosuke Sato, Phys.Rev.D 101,016012 (2020).

[3] S.Coleman, Phys.Rev.D 15, 2929 (1977).

[4] C.G.Callan,Jr. and S.Coleman, Phys.Rev.D 16, 1762 (1977).

[5] S.Coleman, V.Glaser, and A.Martin, Commun.Math. Phys.58, 211-221 (1978).