

## 同軸円環境界を持つシャボン膜の緩和 Relaxation of a soap film bounded using two coaxial rings

○山中拓人<sup>1</sup>, 明石和久<sup>1</sup>, 浅井朋彦<sup>2</sup>\*Takuto Yamanaka<sup>1</sup>, Kazuhisa Akashi<sup>1</sup>, Tomohiko Asai<sup>2</sup>

Abstract: The surface tension exerted on the soap film is proportional to its surface area. Therefore, when gravity and such can be ignored, soap film is formed to be a minimum surface area. The soap film bounded two coaxial rings is known as a rotating body of catenary (catenoid). When the distance between the rings increases, the soap film is separated and relaxed to two circular membranes. The distance is called the critical distance. This study proposes a theoretical model to predict critical distance and the relaxation process flow using the relation between surface area and catenoidal film's constriction. The experiment has conducted using original coaxially rings that are designed to fix coaxially on the optical rail. The theoretical model indicated conformity to the experimental result.

### 1. はじめに

シャボン膜にはたらく表面張力は、膜の表面積に比例する。そのため、重力等の影響を無視する場合、シャボン膜は境界条件下で表面張力による系のポテンシャル、即ち表面積が最小になるような形状をとる。

Figure 1 に同軸円環境界でのシャボン膜の概形図を示す。この形状は、懸垂曲線の回転体(カテノイド)であることが知られている。円環間を離すと、ある距離でカテノイドの面積が極小ではなくなり、分離して円盤状に緩和する。このときの円環間距離を臨界距離と呼ぶが、表面積を用いて緩和過程や臨界距離を議論した研究はなく、またあるウェブサイト<sup>[1]</sup>では、緩和後の形状である2つの円盤とカテノイドが等しい面積になったとき分離すると主張している(モデル1にて詳解)。

本研究では、系のポテンシャルが膜の表面積のみで決定されるとし、面積と括れの関係から臨界距離及び緩和過程を予測する理論モデルを提案(モデル2にて詳解)、これらが実験結果と一致することを示した。これにより、上記ウェブサイトでの主張が誤りであることを指摘する。

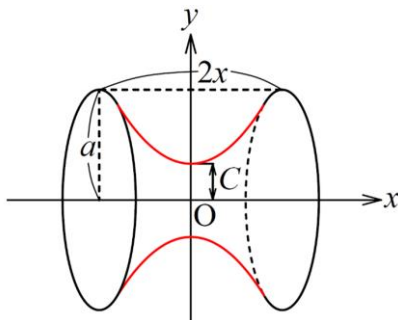


Figure 1. Schematic of coaxial rings and a catenoidal soap film. The red line indicates the soap film,  $a$  is the radius, and  $2x$  is the ring distance.

### 2. 理論値の導出及びモデル化

Figure 1 の座標系において、シャボン膜の表面積は

$$S[y(x)] = 2\pi \times 2 \int_0^x y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (1)$$

と表される。(1)式の被積分関数をオイラー・ラグランジュ方程式に代入、これを解くと  $y(x) = C \cosh(x/C)$  を得る。従って、膜の面積は

$$S(x) = \pi C^2 \left( \sinh \frac{2x}{C} + \frac{2x}{C} \right) \quad (2)$$

となる。ここで  $C$  は積分定数であるが、シャボン膜の最も括れた位置での半径に一致する。

#### 2-1. モデル1

一般的な理解においては、

$$\pi C^2 \left( \sinh \frac{2x}{C} + \frac{2x}{C} \right) = 2\pi a^2 \quad (3)$$

を満たす  $2x$  が臨界距離となる。ここで、端点条件

$$a = C \cosh \frac{x}{C} \quad (4)$$

を用いて計算すると、 $2x \approx 1.055a$  を得る。 $a = 25 \text{ mm}$  とすると、臨界距離は  $26.38 \text{ mm}$  となる。

#### 2-2. モデル2

臨界距離でのシャボン膜の形状変化は突発的である。このことから、突発現象を表すカタストロフィ理論<sup>[2, 3]</sup>を参考にモデル化を行った。ある円環距離  $2x$  に対して、表面積を極小にする  $C$  がただ一つ決まることから、 $x$  を定数、 $C$  を変数として、 $S$  は  $dS/dC = 0$  でなければならない。(2)式より、

$$\frac{dS}{dC} = \frac{d}{dC} \left[ \pi C^2 \left( \sinh \frac{2x}{C} + \frac{2x}{C} \right) \right] = 0 \quad (5)$$

(5)式と端点条件を連立すると、二つの平衡点

A:  $x \rightarrow 0, \quad C \rightarrow 25$

B:  $x \rightarrow 16.5686, \quad C \rightarrow 13.8109$

を得る。(4)式を用いて(2)式及び(5)式の  $x$  を消去した結果 (Figure 2, 3) から緩和過程の予測が可能となる。

- I. 円環間距離  $2x$  がゼロの状態である、点 A から考える。このとき膜の面積はゼロであり、括れていないため  $C$  は円環半径と等しい 25 mm となる。
- II.  $2x$  を大きくすると、膜の面積が大きくなり、次第に中央が括れていく。Figure 2 より点 A は安定な平衡点であるが、表面張力のみで円環を動かすことはできないため、シャボン膜自身で点 A の状態に戻ることはできない。
- III. 点 B は不安定な平衡点であり、緩和が起こる。点 B から点 D にかけて急激に括れがきつくなり ( $C \rightarrow 0$ )、膜は分離する。また、点 B と点 D の面積差が分離に必要なエネルギーを供給するため、この過程III.で  $2x$  は変化しない。従って、点 B での  $2x$  ( $\approx 33.14$  mm) が臨界距離となる。

最後に、緩和後の状態である点 D での面積を考える。これは、面積  $S$  に対して  $C \rightarrow 0$  の極限をとればよい。

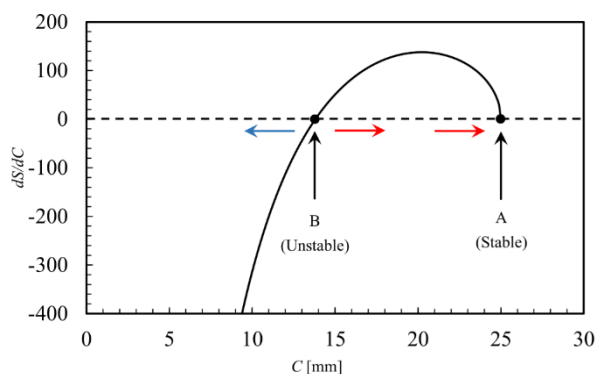


Figure 2. Stability of equilibrium points. The arrows indicate the behavior of the solution for infinitesimal deviations from equilibrium points.

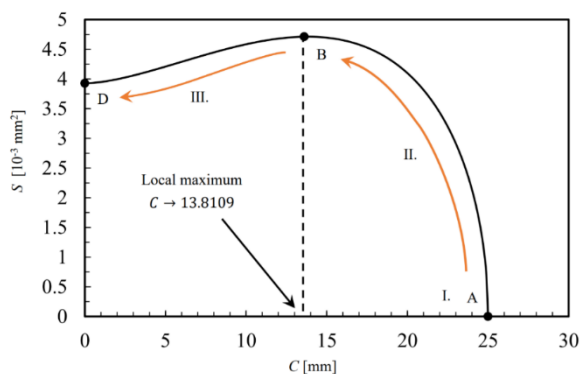


Figure 3. The transition of area  $S$  with the change of constriction  $C$ .

$$S = \lim_{C \rightarrow 0} \pi C^2 \left\{ \sinh \left( 2 \operatorname{arcosh} \left( \frac{a}{C} \right) \right) + 2 \operatorname{arcosh} \left( \frac{a}{C} \right) \right\}$$

$$= \lim_{C \rightarrow 0} \left\{ 2\pi a \sqrt{a^2 - C^2} + 2\pi C^2 \operatorname{arcosh} \left( \frac{a}{C} \right) \right\} = 2\pi a^2 \quad (6)$$

これにより、緩和後の状態が 2 つの円盤状であることが予測される。

### 3. 実験

円環を平行移動させるため、光学レール上で実験を行えるよう固定具を設計した (Figure 4)。実験結果を Figure 5 に示す。分離の瞬間において、円環間距離は 33.1 mm を示していることが分かる。

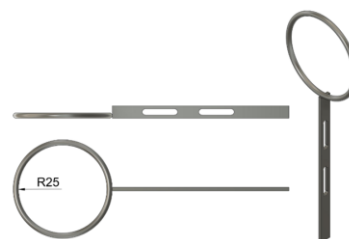


Figure 4. Schematic of designed ring.

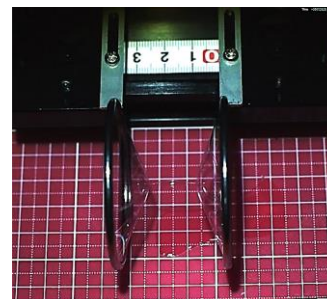


Figure 5. Experimental result for the critical distance—the left ring is positioned at about 33.1 mm.

### 4. まとめ

面積と括れの関係から静力学的に臨界距離、緩和過程の流れを予測する理論モデルを作成した。モデルの臨界距離は有効数字 3 桁で実験結果と一致、緩和後の形状も矛盾しない結果となり、緩和現象を正確に説明できるモデルとしてこれを提案する。

### 5. 参考文献

- [1] S. M. Blinder : “Soap Film between Two Equal and Parallel Rings”, Wolfram Demonstrations Project, 2011, <http://demonstrations.wolfram.com/SoapFilmBetweenTwoEqualAndParallelRings/>, (accessed March 21, 2020).
- [2] E. C. Zeeman : “Catastrophe Theory”, Scientific American, Vol.234, No.4, pp.65, 1976.
- [3] 矢崎成俊 : 「実験数学読本」, 日本評論社, 2016