P-1

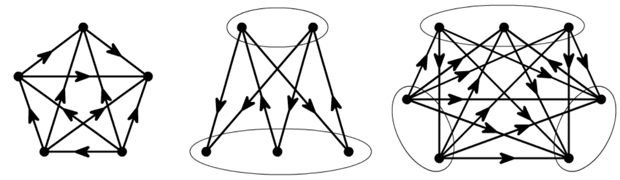
n-partite tournament における king の存在
Existence of kings in n-partite tournaments

○石川渓
Kei Ishikawa[1]

Abstract: In this talk, we give a sufficient condition which implies the existence of 3-kings in all partite sets of a 3-partite tournament. Using the result, we can show that under the same condition any 3-partite tournament has at least two 3-kings.

1　はじめに

辺に向きを与えたグラフを **有向グラフ**と呼ぶ. 完全グラフに向きを与えたグラフを**トーナメント**と呼び, 完全 n 部グラフに向きを与えたグラフを n 部**トーナメント**と呼ぶ. 下の Fig 1: a はトーナメント, b は 2 部トーナメント, c は 3 部トーナメントの例である.



a　**b**　**c**

Figure 1: Example of n-partite tournaments

この論文で扱う有向グラフは有向単純グラフに限り, n 部トーナメントは部集合 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ で構成されるものとする. また有向パスと有向サイクルを単にパス, サイクルと呼ぶ. D を有向グラフとし, $V(D)$ を D の点集合とする. 任意の $u, v \in V(G)$ に対し, u から v への最短なパスの長さを**距離**といい, $d(u, v)$ と表す. また v から出る辺の数を $s^+(v)$ と書き, v に入る辺の数を $s^-(v)$ と書く. もし点 v が $s^-(v) = 0$ であるならば, v を **transmitter** と呼ぶ.

定義 1. 有向グラフ D の点 $u \in D(V)$ が, 任意の $v \in D(V) - u$ に対して, $d(u, v) \le r$ を満たすとき, 点 u を r**-king** と呼ぶ. また $K_r(D)$ を有向グラフ D の *r-king* 全体からなる集合とする.

トーナメントの 2-king に関する結果として以下のものがある.

定理 1 (Landau [2])**.** T を任意のトーナメントとする. このとき $|K_2(T)| \ge 1$.

有向グラフ D が transmitter u を持つとき, 任意の $v \in V(D) - u$ は king でない. なぜなら v から u へのパスが存在しないためである. 以下は transmitter を持たないトーナメントに関する結果である.

[1]日大理工・院 (前)・数学

定理 2 (Moon [5])**.** T を *transmitter* を持たないトーナメントとする. このとき $|K_2(T)| \ge 3$.

n 部トーナメントの 4-king に関する結果は以下のものがある.

定理 3 (Gutin [1], Petrovic and Thomassen [6])**.** T を任意の $n(\ge 2)$ 部トーナメントとする. このとき $|K_4(T)| \ge 1$.

定理 4 (Koh and Tan [3])**.** T を *transmitter* を持たない $n(\ge 2)$ 部トーナメントとする. このとき $n = 2$ ならば $|K_4(T)| \ge 4$, $n \ge 3$ ならば $|K_4(T)| \ge 3$.

定理 3 は 3-king の場合では成立しないことが分かっている. このことから n 部トーナメントが 3-king を持つ十分条件について研究が行われ, Koh と Tan [3] が $n = 3$ の場合について条件を与えた. この結果は Tan [7] によって $n(\ge 3)$ 部トーナメントに拡張されている.

一方で n 部トーナメントが 3-king を持たないときは次のことが分かっている.

定理 5 (Koh and Tan [4])**.** T を *transmitter* と *3-king* を持たない $n(\ge 3)$ 部トーナメントとする. このとき $|K_4(T)| \ge 8$.

その後 Tan [7] は transmitter と 3-king を持たない $n(\ge 3)$ 部トーナメントの構造を決定した.

n 部トーナメントに存在する king について, これら様々な結果が得られてきたが, ほとんどが局所的なものであり, 全ての部集合 (全域的) に king が存在することの条件は知られていない. 私の研究の目的は, 3 部トーナメントの全ての部集合に 3-king が存在する条件を示すことである.

2　4-king の存在

n 部トーナメント T に対して,

$$M_i = \{u \in V_i \mid s(u) \ge s(v) \ for\ each\ v \in V_i\}$$

とする. また $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ で誘導される部分グラフを M とする. 長さ 3 のサイクルを C_3 と書く. Koh と Tan [3] は 3 部トーナメントに 3-king が存在するときの十分条件を次のように与えた.

定理 6 (Koh and Tan [3])**.** 3 部トーナメント T の M が C_3 を含むならば, その C_3 の中には T の *3-king* が存在する.

Tan はこの結果を次のように拡張した.

定理 7 (Tan [7])**.** T を *transmitter* を含まない n (≥ 3) 部トーナメントとする. T の M が *transmitter* を持たない位数 n のトーナメントを含むならば, T には *3-king* が存在する.

定理 6 の条件の下で 3 部トーナメントの全ての部集合に 4-king が存在することが次の補題から言える.

補題 8 (Koh and Tan[3])**.** T を n (≥ 2) 部トーナメントとする. ある $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $u \in V_i$ とする. 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $d(u, x_j) \leq 2$ となるような $x_j \in M_j$ が存在するならば, $u \in K_4(T)$.

補題 8 から次の系が成り立つ.

系 9. 3 部トーナメント T の M は C_3 を含むならば, $V(C) \subset K_4(T)$. 従って任意の $i = 1, 2, 3$ に対し, $V_i \cap K_4(T) \neq \phi$.

3　3-king の存在

系 9 より M が C_3 を含めば各部集合に 4-king が存在することが分かった. そこで 3-king の場合を考える.

問題 1. 3 部トーナメント T の M が C_3 を含むとき, 全ての部集合に *3-king* が存在するか.

C_3 の点が全て 3-king のときは各部集合に 3-king が存在する. よって C_3 上の 3-king が 1 点のみ, もしくは 2 点のみのときについて考えればよい. C_3 上に 3-king が 1 点のみの場合は次の主張が成り立つ.

定理 10 (Ishikawa and Yoshimoto)**.** 3 部トーナメント T の M は C を含み, $|C \cap K_3(T)| = 1$ ならば, 任意の $i = 1, 2, 3$ に対し, $V_i \cap K_3(T) \neq \phi$. さらに $|K_3(T)| \geq 4$.

定理 6 より T の M が C_3 を含めば $|K_3(T)| \geq 1$ が分かるが, 定理 10 からそれは以下のように改良できる.

系 11 (Ishikawa and Yoshimoto)**.** 3 部トーナメント T の M は C_3 を含むならば, $|K_3(T)| \geq 2$.

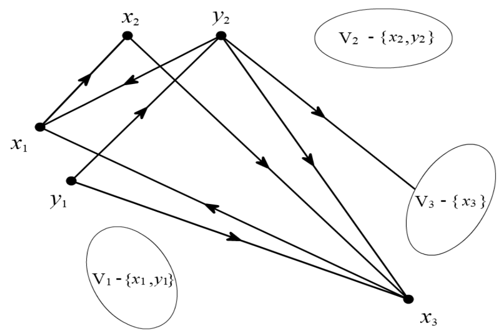
Proof. $|C \cap K_3(T)| \geq 2$ のときは明らかに主張は正しい. $|C \cap K_3(T)| = 1$ のとき, 定理 10 より $|K_3(T)| \geq 4$ であるため, 主張が成立する. □

また定理 10 より次の系が成り立つ.

系 12 (Ishikawa and Yoshimoto)**.** 3 部トーナメント T の M は C_3 を含むならば, T の少なくとも 2 つの部集合は *3-king* を持つ.

C_3 上の 3-king が 2 点のとき, 各部集合に 3-king が存在すれば問題 1 は正しい. しかし研究の結果, 問題 1 の反例が見つかった. 従って系 12 の下限は最良である. 以下は $|C \cap K_3(T)| = 2$ のときの特徴付けである.

Fact 13. 3 部トーナメント T の M は $x_i \in M_i (i = 1, 2, 3)$ で構成される $C = x_1x_2x_3x_1$ を含み、$|C \cap K_3(T)| = 2$ を満たす. 対称性から $x_1 \in K_3(T), x_2 \in K_3(T), x_3 \notin K_3(T)$ であるとき, T は下図の構造となる.



系 12 の下限が最良であることが分かったことにより, 次の問題が生じる.

問題 2. 3 部トーナメント T は M に C_3 を含み, $|K_3(T)| = 2$ であるとする. このとき T の構造を決定できないか.

我々は Tan [7] が $|K_3(T)| = 0$ のときの n 部トーナメントの構造を決定したように, $|K_3(T)| = 2$ のグラフの構造を決定できないか, 研究を進めている.

References

[1] G.M. Gutin, The radii of n-partite tournaments, Math. Notes 40 (1986) 743-744.

[2] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure, Bulletin of Mathematical Biologysics Volume 15 (1953).

[3] K.M. Koh, B.P. Tan, Kings in multipartite tournaments, Discrete Math. 147 (1995) 171–183.

[4] K.M. Koh, B.P. Tan, The number of kings in a multipartite tournament, Discrete Math. 167/168 (1997) 411–418.

[5] J.W. Moon, Solution to problem 463, Math. Mag. 35 (1962) 189.

[6] V. Petrovic and C. Thomassen, Kings in k-partite tournaments, Discrete Math. 98 (1991) 237-238.

[7] B.P. Tan, On 3-kings and 4-kings in multipartite tournaments, Discrete Math. 306 (2006) 2702–2710.