P-11

Riemann-Zeta 関数の値の数論的性質について
Arithmetic properties of values of the Riemann zeta-function

○鈴木 雄大
Yudai Suzuki[1]

Abstract

The value at 2 of the Riemann zeta function ζ(z) can be proven irrational, via the fact that the value ζ (2) is a rational multiple of the square of π. However, this method is applicable only to the values at even numbers. In this talk, we introduce a proof due to F. Beukers, based on Padé approximation, a number-theoretic approach, which enables us to shows directly investigate general values of the Riemann zeta function.

1 Riemannζ 関数

Riemannζ 関数は s が複素数の範囲で定義されているが，本稿では実数に限って議論を進める．

Definition
Riemannζ 関数とは，実数 $s>1$ に対して

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

で定義される関数のことである．以後 ζ 関数と表記する．

$p>1$ を素数としたとき，$s>1$ に対して，オイラーによって発見された恒等式 $\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ が成立することが知られている．これより，素数全体にわたる積で表される ζ 関数に関して調べることは素数の解明に役立つ．このことから ζ 関数について調べることは重要視されている．

本講演ではこの Riemannζ 関数の数論的性質，特に $\zeta(2)$ の無理数性について論ずる．

Proposition 1 (L.Euler)
$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

Proof $\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi+x}{2}}\right)$ であることを用いると，

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sin^2\frac{2}{\pi}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{4}}\right)\\ &= \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

ここで，$n\to\infty$ とすれば，$\lim_{N\to\infty}N\sin\frac{x}{N}=x$ であることから，$N=2^n, x=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ と取り直せば，

$$\frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}=\frac{2}{N^2}\sum\frac{1}{\sin^2\frac{x}{N}}$$
$$\to 2\sum\frac{1}{x}(N\to\infty)=\frac{8}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$x=\sum\frac{1}{n^2}$ とおくと，$\sum\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}x$ より $x=\frac{1}{4}x+\frac{\pi^2}{8}\therefore x=\frac{\pi^2}{6}$ □

Proposition 2 (F.Beukers)
π^2 は無理数である．

Proof

$$P_n(x)=\left(\frac{1}{n!}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(1-x)^n,$$
$$I_n=\int_0^1(\sin\pi t)P_{2n}(t)dt$$

という関数に対して部分積分を $2n$ 回行えば，

$$\begin{aligned}I_n &= \left(\frac{1}{(2n)!}\right)\int_0^1(\sin\pi t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{2n}t^{2n}(1-t)^{2n}dt\\ &= (-1)^n\left(\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\right)\int_0^1(\sin\pi t)t^{2n}(1-t)^{2n}\end{aligned}$$

となり，$0\leqq t\leqq 1$ なので

$$|I_n|<\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\left(\frac{1}{(2n)!}\right)$$

であり，$I_n\neq 0$ である．一方，I_n を展開すると，各項に $\int_0^1 t^m(\sin\pi t)dt$($m$ は $4n$ 以下の偶数) の項を持っていることより部分積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^m(\sin\pi t)dt &= \frac{1}{\pi}[-t^m\cdot\cos\pi t]_0^1+\frac{m}{\pi}\int_0^1 t^{m-1}\cos\pi t dt\\ &= \frac{1}{\pi}-\frac{m(m-1)}{\pi^2}\int_0^1 t^{m-2}(\sin\pi t)dt\end{aligned}$$

ここで，A_n を整数係数の多項式とすれば，$I_n=\pi^{-1}\cdot A_n(\pi^{-2})$ となる．
今，$\pi^2=\frac{p}{q}(p,q\in\mathbb{Z},\quad q>1)$ とおいて矛盾を導く．
$I_n\neq 0$ であることから，

$$\frac{1}{\pi p^n}\leqq\left|\left(\frac{1}{\pi}\right)\cdot A_n\left(\frac{q}{p}\right)\right|=|I_n|$$

$|I_n|<\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\left(\frac{1}{(2n)!}\right)$ であったので，上の式と比べれば $\frac{1}{\pi p^n}\leqq|I_n|<\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\left(\frac{1}{(2n)!}\right)$ となるが，これより $\frac{1}{\pi}<\left(\frac{\pi\sqrt{p}}{4}\right)^{2n}\left(\frac{1}{(2n)!}\right)$ となり，n を十分大きく取ると矛盾．
よって π^2 は無理数． □

ここで Proposition1,Proposition2 を合わせて考えれば，$\zeta(2)$ が無理数であることは容易にわかるが，この考え方は $\zeta(2)$ が π^2 と有理数の積である事に依存しており，偶数の値以外に対する値の無理数性の考察に適用できない．そこで，$\zeta(2)$ に対して，無理数性を直接証明する方法を考察する．

2　$\zeta(2)$ の無理数性

この章では，Padé 近似という数論的な近似を用いて、$\zeta(2)$ が無理数であることを直接示した F. Beukers の証明を紹介する。
d_n を 1 から n までの整数の最小公倍数とする．このとき $d_n = \prod_{p \leqq n} p^{(\log n/\log p)}$(但し p は素数) である．
$\zeta(2)$ の無理数性を証明するために，まずは以下の補題について考える．

Lemma 1
$(a)r$ と s を正の整数とする。このとき $r > s$ とすれば，$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dxdy$ は有理数で，分母は d_r^2 の約数である．
$(b)r = s$ のとき，
$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} dxdy = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{r^2}$
となる．

Proof

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dxdy \tag{1}$$

に対して，$(1-xy)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k$ より

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+r} y^{k+s} dxdy$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)(k+s+1)}. \tag{2}$$

このときの (1.2) 式の合計は

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{(k+r+1)(k+s+1)} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{k+r+1} - \frac{1}{k+s+1} \right\} \\ &= \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{r} \right\} \end{aligned}$$

となり，(a) が成立する．
また，$r = s$ とすれば，(1.1),(1.2) 式より

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^2}$$

が得られ，(b) が成立する．　□

Theorem 1 (Theorem1,[1])
$\zeta(2)$ は無理数である．

Proof
正整数 n に対して，

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy \tag{3}$$

を考える．ここで $P_n(x)$ は $n!P_n(x) = \{\{\frac{d}{dx}\}^n x^n (1-x)^n\}$ によって定義されるルジャンドル多項式である．

$P_n(x)$ は整数係数の多項式であり，Lemma 1 より (1.3) 式は $(A_n + B_n\zeta(2))d_n^{-2}$ となる (A_nと B_n は n によって定まる整数).
また，(1.3) 式を x について n 回部分積分すると，

$$(-1)^n \int \frac{y^n(1-y)^n x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dxdy. \tag{4}$$

ここで，

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \leqq \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^5 (0 \leqq {}^\forall x \leqq 1, 0 \leqq {}^\forall y \leqq 1)$$

より，これを用いて (1.4) 式を上から評価すると，

$$\begin{aligned} &\int \frac{y^n(1-y)^n x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dxdy \\ &\leqq \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^{5n} \int \frac{1}{1-xy} dxdy = \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^{5n} \zeta(2) \end{aligned}$$

となり，(1.4) 式が 0 ではないことから

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)|d_n^{-2} < \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^{5n} \zeta(2)$$

となり，n を十分大きく取って考えると

$$\begin{aligned} 0 \quad < \quad & |A_n + B_n\zeta(2)| < d_n^2 \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^{5n} \zeta(2) \\ < \quad & 9^n \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^{5n} \zeta(2) < \left(\frac{5}{6} \right)^n \to 0 (n \to \infty). \end{aligned}$$

$\zeta(2)$ が有理数であると仮定すると，$|A_n + B_n\zeta(2)|$ は n の値に関係なく下に有界であることから，矛盾が生じる．よって $\zeta(2)$ は無理数である．　□

References

[1] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc., **11**, (1979), 268–272.

[2] J. Hofbauer, *A Simple Proof of* $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ *and Related Identities*, Amer. Math. Monthly, **109**, (2002), 196-200.