P-12

対称べき L 関数の低い位置にある零点の重み付き分布
Weighted density of low-lying zeros of symmetric power L-functions

○杉山　真吾 [1]
*Shingo Sugiyama [1]

Abstract: Let F be a totally real number field and $\mathbb{A}$ its adèle ring. In this talk, we give densities of low-lying zeros of symmetric power L-functions $L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi))$ weighted by special values of $L(\frac{z+1}{2}, \mathrm{Sym}^2(\pi))$ for a family of irreducible cuspidal automorphic representations π of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ corresponding to primitive Hilbert modular forms in the level aspect.

1. はじめに

L 関数の低い位置にある零点 (low-lying zero) たちの分布は, ランダム行列理論から生じるコンパクト古典 Lie 群の固有値の分布と一致する, という Katz, Sarnak (1999) の philosophy がある. この予想はいくつかの場合に確認されてきた. 本講演では, 総実代数体 F のアデール環 $\mathbb{A}$ に対する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約カスピダル保型表現の族 $\{\pi\}$ の対称べき L 関数の族 $\{L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi))\}$ の零点分布を, 対称 2 次 L 関数の特殊値 $L(\frac{z+1}{2}, \mathrm{Sym}^2(\pi))$ $(z \in [0,1])$ の重み付きで考察する.

2. L 関数

保型 L 関数の定義のためには基礎知識がたくさん必要なので, かいつまんで説明することにする.

[保型表現] F を有限次総実代数体であって, 素数 $2 \in \mathbb{Q}$ が F の中で完全分解するようなものとする. F のアデール環を $\mathbb{A}$ とする. F の素点 v に対して, F の v による完備化を F_v とする. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約カスピダル保型表現 π は F の各素点 v における $\mathrm{GL}_2(F_v)$ の既約 admissible 表現 π_v の制限テンソル積 $\otimes_v \pi_v$ に分解するので, 各成分に条件を課すことで primitive Hilbert モジュラー形式に対応する集合を用意する. $l = (l_v)_{v|\infty}$ を 6 以上の偶数の族とし, $\mathfrak{q}$ を, F の整数環 $\mathfrak{o}$ の非ゼロな素イデアルとする. 保型表現の集合 $\Pi^*_{\mathrm{cus}}(l, \mathfrak{q})$ を, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約カスピダル保型表現 π であって, 以下の (i), (ii), (iii) を満たすものとする: (i)π の中心指標は自明表現, (ii) 任意の F の無限素点 v における局所成分 π_v が, 極小 $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ タイプが l_v であるような $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現に同型, (iii) π のコンダクターが $\mathfrak{q}$ である. この定義から, 特に $F = \mathbb{Q}$ の時は $\mathfrak{q} = q\mathbb{Z}$ となる素数 q をとると, $\Pi^*_{\mathrm{cus}}(l, \mathfrak{q})$ は重さ l, レベル q の本質的に重要な楕円モジュラー形式たちと同一視できる. (i.e., Hecke 作用素の同時固有関数であるような重さ l, レベル q のカスピダル・新・楕円カスプ形式の空間 $S_l^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(q))$ の元全体からなる集合と同一視できる.)

[対称べき L 関数] F の素点 v と整数 $n \geq 1$ に対して, 局所 Langlands 対応によって $\mathrm{GL}_n(F_v)$ の既約 admissible 表現の同型類は, Weil-Deligne 群 W'_{F_v}(F_v の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$ と関係がある群) の L パラメーター (良い n 次元表現) の共役類と一対一に対応し, その対応は局所 L 因子と局所 ϵ 因子を保つ. この局所 Langlands 対応を rec_n と書く. 整数 $r \geq 1$ に対して, 対称テンソル表現 $\mathrm{Sym}^r : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{C})$ に対応する π_v のリフト $\mathrm{Sym}^r(\pi_v)$ は,

$$\mathrm{rec}_{r+1}(\mathrm{Sym}^r(\pi_v)) = \mathrm{Sym}^r \circ \mathrm{rec}_2(\pi_v)$$

で定義できる. 保型表現 $\pi = \otimes_v \pi_v \in \Pi^*_{\mathrm{cus}}(l, \mathfrak{q})$ に対して $\mathrm{Sym}^r(\pi) := \otimes_v \mathrm{Sym}^r(\pi_v)$ は $\mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{A})$ の既約 admissible 表現であるから, $\mathrm{Sym}^r(\pi)$ のスタンダード L 関数

$$L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi)) = \prod_v L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi_v))$$

(この無限積は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で収束) が定義できる. この L 関数を π の対称べき L 関数と呼ぶ. 大域 Langlands 予想を信じると $\mathrm{Sym}^r(\pi)$ は等圧的 (isobaric) な保型表現であり, コンダクターが素イデアルである π は虚数乗法を持たないことと合わせれば, $L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi))$ は $\mathbb{C}$ 上の解析関数として解析接続され,

$$L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi)) = \epsilon(s, \mathrm{Sym}^r(\pi)) L(1-s, \mathrm{Sym}^r(\pi))$$

の形の関数等式を持つと期待されている. ここで大域 ϵ 因子 $\epsilon(s, \mathrm{Sym}^r(\pi))$ は非ゼロ整関数である. 本講演では対称べき L 関数に関する上記の解析的性質は仮定する. 注意として, Newton, Thorne (2020) の結果により $F = \mathbb{Q}$ の時は $\mathrm{Sym}^r(\pi)$ はカスピダル保型表現であるから, 上記の解析的性質は知られている. 一般の F に対しては, $r \leq 4$ の時は知られているが, $r \geq 5$ の時は現時点では有理型関数に解析接続されることと関数等式しか証明されていない.

3. 低い位置にある零点

本講演では対称べき L 関数の族 $\{L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi)) \mid \pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(l, \mathfrak{q}), \mathfrak{q}$ は非ゼロ素イデアル $\}$ の零点分布を考察する. 分布について論じる上で, まずテスト関数 ϕ としては, $\mathbb{R}$ 上の Schwartz 関数 $(\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ で Fourier 変換 $\hat{\phi}(\xi) =$

1: 日大理工・教員・数学

$\int_{\mathbb{R}}\phi(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$ のサポートがコンパクトであるようなものとする (この時 ϕ は $\mathbb{C}$ 上の整関数に拡張され, Paley-Wiener 関数になる). $L(s,\mathrm{Sym}^r(\pi))$ の零点 ρ に対して $\rho=\frac{1}{2}+i\gamma$ で $\gamma\in\mathbb{C}$ を定義する. 一般 Riemann 予想 (GRH) を信じると常に $\gamma\in\mathbb{R}$ であるが, 本講演では GRH は仮定しないので $\gamma\in\mathbb{R}$ かどうかは分からない. 上で用意したテスト関数 ϕ を用いて, $L(s,\mathrm{Sym}^r(\pi))$ の零点の 1 レベル密度 (one-level density) を

$$D(\mathrm{Sym}^r(\pi),\phi)=\sum_{\rho}\phi\left(\frac{\log Q(\mathrm{Sym}^r(\pi))}{2\pi}\gamma\right)$$

で定義する. ここで, $L(s,\mathrm{Sym}^r(\pi))$ の零点 ρ は重複度込みで動いていることに注意. また $Q(\mathrm{Sym}^r(\pi))$ は $\mathrm{Sym}^r(\pi)$ の解析的コンダクターであり, $\pi\in\Pi^*_{\mathrm{cus}}(l,\mathfrak{q})$ なので $Q(\mathrm{Sym}^r(\pi))\asymp(\prod_{v\in\Sigma_\infty}l_v^{2\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor})\,\mathrm{N}(\mathfrak{q})^r$ と表される. ここで $\mathrm{N}(\mathfrak{q}):=\#(\mathfrak{o}/\mathfrak{q})$ は $\mathfrak{q}$ の絶対ノルムである. テスト関数として Schwartz 関数を考えているので, 実軸に近い零点の寄与のみを抽出しており, このことから one-level density で扱われている零点のことを, 低い位置にある零点 (low-lying zero) と呼ぶ.

4. 主結果

ランダム行列理論に現れる確率密度関数を説明しよう. $G(N)$ を古典コンパクト Lie 群 $\mathrm{U}(N)$, $\mathrm{USp}(2N)$, $\mathrm{SO}(2N)$, $\mathrm{SO}(2N+1)$, $\mathrm{O}(N)$ のいずれかとする. $A\in G(N)$ の固有値は $e^{\frac{2\pi i}{N}\theta}$ $(0\le\theta\le N)$ の形であるが, A を動かして $N\to\infty$ とすると, θ たちの $\mathbb{R}_{\ge0}$ 内での分布を考察することができて, 5 つの群それぞれに対して $\mathbb{R}_{\ge0}$ 上の密度関数は以下で与えられる:

$$W(\mathrm{U})(x)=1,\qquad W(\mathrm{Sp})(x)=1-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x},$$
$$W(\mathrm{SO(even)})(x)=1+\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x},$$
$$W(\mathrm{SO(odd)})(x)=1-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}+\delta_0(x),$$
$$W(\mathrm{O})(x)=1+\frac{1}{2}\delta_0(x),$$

ここで δ_0 は 0 をサポートにもつ $\mathbb{R}$ 上の Dirac デルタ超関数である. さて, $z\in[0,1]$ に対して重み因子 w_π を

$$w_\pi=\frac{L(\frac{z+1}{2},\mathrm{Sym}^2(\pi))}{L(1,\mathrm{Sym}^2(\pi))}$$

で定義する. すると重み付き零点分布は以下のようになる.

定理 1 (S. [1]) 拡大次数 $[F:\mathbb{Q}]$, l, r の 3 つのデータで明示的に記述できる $\alpha>0$ が存在して, 任意の $z\in[0,1]$ と $\mathrm{supp}(\hat{\phi})\subset(-\alpha,\alpha)$ なる任意の $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\lim_{\mathrm{N}(\mathfrak{q})\to\infty}\frac{1}{\sum_{\pi\in\Pi^*_{\mathrm{cus}}(l,\mathfrak{q})}w_\pi}\sum_{\pi\in\Pi^*_{\mathrm{cus}}(l,\mathfrak{q})}w_\pi D(\mathrm{Sym}^r(\pi),\phi)$$
$$=\begin{cases}\hat{\phi}(0)-\frac{1}{2}\phi(0)=\int_{\mathbb{R}}\phi(x)W(\mathrm{Sp})(x)dx \\ \qquad\qquad (r\text{ は偶数 }(r,z)\neq(2,0)),\\ \hat{\phi}(0)+\frac{1}{2}\phi(0)=\int_{\mathbb{R}}\phi(x)W(\mathrm{O})(x)dx \qquad (r\text{ は奇数}),\\ \hat{\phi}(0)-\frac{3}{2}\phi(0)+2\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}(x)|x|dx \qquad ((r,z)=(2,0)).\end{cases}$$

上の定理の 3 番目で生じた分布はランダム行列理論には現れない新しい分布である. また $z=1$ の時は恒等的に $w_\pi=1$ なので, 重みのない通常の零点分布も扱えている. 特に $F=\mathbb{Q}$ で $z=1$ の時は Ricotta, Royer (2011) の結果と一致している. さらに, 重み付き零点分布は $z=0$ の時のみ変化しうることが見て取れる. そして $z=0$ としたときに密度が変化するのはちょうど $r=2$ の時である. この現象は「重み因子が中心値 $L(1/2,\mathrm{Sym}^2(\pi))$ の時にのみ不思議な事が起こる」と解釈できる. L 関数の中心値は Riemann 予想や Birch, Swinnerton-Dyer 予想から推察できる通り数論的に重要な量であり, 本研究は L 関数の中心値の新たな特徴を見出している.

重み付き零点分布は楕円モジュラー形式 f のスタンダード L 関数 $L(s,f)$ の零点に中心値 $L(1/2,f)$ の重みをつけた場合 (Knightly, Reno (2019)) と, 次数 2 の Siegel モジュラー形式 f のスピノール L 関数 $L(s,f,\mathrm{Spin})$ に中心値 $L(1/2,f,\mathrm{Spin})$ の重みをつけた場合 (Kowalski, Saha, Tsimerman (2012), Dickson (2015)) が知られているが, これらの設定でも同様に密度関数に変化が生じた. これらの状況から講演者は次を予想する: 「一般に, L 関数の族 $\{L(s,\Pi)\}_{\Pi\in\mathcal{F}}$ の low-lying zero の分布を w_Π の重み付きで考察した場合, 密度関数に変化が生じるための必要十分条件は, 重み因子 w_Π が本質的に中心値 $L(1/2,\Pi)$ を含む時であろう」. 現段階では evidence はまだ数少ないが, 今後は様々な L 関数について考察し, L 関数の "特殊値" と "零点" の間の相互関係を明らかにしたい.

定理の証明には次の 3 つを用いる: (1) $L(s,\mathrm{Sym}^r(\pi))$ に対する Weil の明示公式, (2) Landau の素イデアル定理を用いた Stieltjes 積分, (3) 講演者が以前与えた「明示的な Jacquet-Zagier 型跡公式」 (都築と共同 [2]).

5. 参考文献

[1] S. Sugiyama, *Low-lying zeros of symmetric power L-functions weighted by symmetric square L-values*, preprint.

[2] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, J. Func. Anal. Vol. **275**, Issue 11 (2018), 2978–3064.