P-2

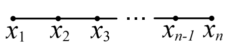
直径 2 のグラフのレインボー連結数と Moore グラフ
Rainbow connection number of graph with diameter 2 and moore graph

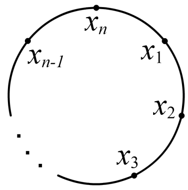
五月女巧
Takumi Saotome[1]

Abstract: The notion of rainbow connections was introduced by Chartrand et al. in 2008. In this paper, we present a relationship between the problem of upper bounds on the rainbow conection number rc(G) for graphs of diameter 2 and the problem of the rainbow connection number for Moore graphs.

1　レインボー連結数

本稿では, 単純, 有限, 無向グラフのみを考える. グラフ G に対し, 頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ とする. 頂点 x に接続している辺の数を x の**次数**といい, その最小数を最小次数と呼び, $\delta(G)$ と書く. 下の左図はパス, 右図はサイクルである.





任意の $u, v \in V(G)$ に対して, u, v を結ぶ最短パスの辺数を u と v の**距離**という. 任意の 2 点間の距離の最大値を G の**直径**といい, $diam(G)$ で表す. グラフ G に含まれるサイクルの長さの最小値を G の**内周**といい, $g(G)$ と書く. 任意の 2 点に対して, その 2 点を結ぶパスが存在するときグラフは**連結**でるという. ある辺を除去した場合, グラフが非連結になるときその辺を**橋**といい, 橋がないグラフを *bridgeless* グラフという. パスは連結グラフで, 全ての辺が橋である. 一方サイクルは *bridgeless* グラフである.

Definition 1.1. グラフ G と $n \in \mathbb{N}$ に対して, $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, n\}$ を辺着色と呼ぶ. **レインボーパス**とは, 辺の色が全て異なるパスのことである. 任意の $u, v \in V(G)$ に対し, u と v を結ぶレインボーパスがあるとき, 辺着色グラフ G を**レインボー連結**であるという. G がレインボー連結のとき辺着色 c を**レインボー着色**という. G がレインボー連結となるために必要な色の最小数を G の**レインボー連結数**といい, $rc(G)$ と書く.

レインボー連結に関する最初の結果は Chartrand et al. による以下の結果である.

Thorem 1 (Chartrand et al. 2008 [1]). G を位数 n の連結グラフとする. このとき次が成り立つ.
(i) $1 \leq rc(G) \leq n-1$
(ii) $rc(G) \geq diam(G)$
(iii) $rc(G) = 1 \iff G$ は完全グラフ
(iv) $rc(G) = n-1 \iff G$ は木
(v) G が長さ $n \geq 4$ のサイクルならば $rc(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$rc(G)$ の上限の研究は現在活発に行われていて, 以下のような結果がある.

Thorem 2 (Schiermeyer 2009). G を頂点数 n, $\delta \geq 3$ の連結グラフとする. このとき, $rc(G) \leq \frac{3}{4}n$ が成り立つ.

Thorem 3 (Chandran et al. 2010). G を頂点数 n, $\delta \geq 4$ の連結グラフとする. このとき, $rc(G) \leq \frac{3n}{\delta+1} + 3$ が成り立つ.

Thorem 4 (Caro et al. 2008). G を頂点数 n の 2-連結グラフとする. このとき, $rc(G) \leq \frac{2}{3}n$ が成り立つ.

Thorem 5 (Holub et al. 2015). X を連結グラフとする. このとき任意の X-$free$ グラフ G が $rc(G) \leq diam(G) + k_X$ を満たす定数 k_X が存在する $\iff X = P_3$

Thorem 6 (Holub et al. 2015). $X, Y \neq P_3$ を連結グラフとする. このとき任意の (X, Y)-$free$ グラフ G が $rc(G) \leq diam(G) + k_{XY}$ を満たす定数 k_{XY} が存在する $\iff X = K_{1,r} (r \geq 4)$, $Y = P_4$ または $X = K_{1,3}$, $Y = N$ の誘導部分グラフ

Thorem 7 (Dong et al. 2013). G を $\delta \geq 2$ となる連結グラフとする. このとき $rc(G) \leq 2\alpha(G) - 1$ が成り立つ. また, 上限は最良である. ただし, $\alpha(G)$ は G の独立数である.

Theorem 7 から次の主張が得られる.

Corollary 1 (Dong et al. 2013). G を連結グラフとする. このとき $rc(G) \leq 2\chi(\overline{G}) - 1$ が成り立つ. ただし, $\chi(\overline{G})$ は G の補グラフの染色数である.

1.1　直径とレインボー連結数

Basavaraju et al.(2012) は $diam(G) = 2$ の *bridgeless* グラフに対して, $rc(G) \leq 8$ が成り立つことを示した. Li らはこの上限以下のようにを改良した.

[1]日大理工・院 (前)・数学

Thorem 8 (Li et al. 2012 [4])**.** *G が $diam(G) = 2$ な bridgeless グラフならば $rc(G) \leq 5$ となる.*

Dong[?] らは Theorem 8 の上限が最良であることを示すグラフを構成した. $diam(G) = 3$ のグラフに対しては以下の結果がある.

Thorem 9 (Li et al. 2017)**.** *$diam(G) = 3$ である任意の bridgeless グラフ G に対し, $rc(G) \leq 9$ が成り立つ.*

本研究では以下の問題を考える.

Problem 1. *$diam(G) = 2$ の bridgeless グラフに $g(G) = 5$ を加えることで $rc(G)$ の上限が改良できるか.*

2 Moore graph

グラフ G の頂点の次数がすべて k に等しいとき, G は k**-正則**であるという.

Definition 2.1. *$diam(G) = d$ の r-正則グラフにおいて, 頂点数が*

$$1 + r\sum_{i=0}^{d-1}(r-1)^i$$

*であるものを **Moore グラフ**という.*

Moore グラフの研究は Hoffman と Singleton によって始まった. *Moore* グラフの決定はとても難しい問題で, 現在わかっている *Moore* グラフは完全グラフ, 奇サイクルと以下のものである.

Thorem 10 (Hoffman et al. 1960 [3])**.** *$diam(G) = 2$ の Moore グラフは $2, 3, 7, 57$-正則のときのみ存在する. また $2, 3, 7$-正則の場合は一意的にグラフが決まる.*

$diam(G) = 2$ の 2-正則 *Moore* グラフは C_5, $diam(G) = 2$ の 3-正則 *Moore* グラフはペテルセングラフである. $diam(G) - 2$ の 7-正則 *Moore* グラフは後で定義する *Hoffman-Singleton* グラフである. $diam(G) = 2$ の 57-正則 *Moore* グラフに関しては存在を仮定すると, 位数は 3250 となることは分かっているが, いまだにグラフが存在するかどうかは未解決である.
また, Singleton の結果より次の主張が成り立つ.

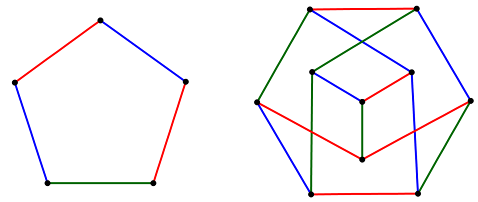
Thorem 11. *次の 3 つは同値である.*
①*$diam(G) = d$, r-正則なグラフで頂点数が上限のもの.*
②*$g(G) = 2d+1$, r-正則なグラフで頂点数が下限のもの.*
③*$diam(G) = d$ かつ $g(G) = 2d+1$ なグラフ.*

Theorem 11 より, Problem 1 は次のように言い換えられる.

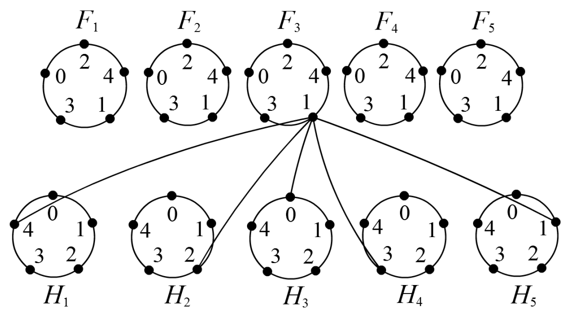
Problem 2. *$diam(G) = 2$ の Moore グラフの $rc(G)$ を決定でるか.*

頂点数 5 のサイクルとペテルセングラフの $rc(G)$ は以下のようになる.

Fact 2. *位数 5 のサイクルとペテルセングラフのレインボー連結数は 3 である.*



次の問題は *Hoffman-Singleton* グラフの $rc(G)$ でで, その構成は以下のとおりである. 下の図のように F_1, $\cdots F_5$, $H_1 \cdots H_5$ をラベル付けされた頂点から成る 10 個の互いに素な長さ 5 のサイクルとする.*Hoffman-Singleton* グラフは $F_1 \cup \cdots \cup F_5 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_5$ に全ての $1 \leq j \leq 5$, $0 \leq i \leq 4$, $1 \leq k \leq 5$ に対して, 点 i と点 $i + jk$ を辺で結ぶことで得られるグラフである.



我々は以下の予想を提言する.

Conjecture 1. *Hoffman-Singleton グラフの $rc(G)$ は 3 である.*

現在この予想を解決しようと研究を進めている.

References

[1] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon and P. Zhang, *Rainbow connection in graphs*, Math. Bohem. 133 (2008) 8598

[2] M. Miller and Jozef Siran, *Moore Graphs and Beyond : A survey of the Degree/Diameter Problem*, The Electronic Journal of Combinatorics (2013)

[3] A.J. Hoffman and R.R. Singleton, *On Moore graphs with diameter 2 and 3*, IBM J. Res. Develop. 4 (1960) 497504.

[4] Li, H., Li, X., Liu, S.: *Rainbow connection in graphs with diameter 2*. Discrete Math. 312(8), 1453 1457 (2012)