P-3

微分方程式の生物学への応用

Application of differential equations to biology

齋藤　傑[1]
Suguru Saitou

Abstract: First, the method for analyzing the differential equations is described, and then the competitive differential equations of the two species are considered.

1. ヌルクライン

関数$x_i(i=1,2,\dots,n)$に関する系

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ x'_2 = f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \qquad\vdots \\ x'_n = f_n(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{cases}$$

に対してx_jヌルクラインとは, x'_jが0になる, つまり$f_j(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$によって定まる点の集合のことである.

2. 線形化方程式

$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$とおき, 上の系を$X'=F(X)$とかく. $F(X_0)=0$をみたす点X_0におけるFのヤコビ行列をDF_{X_0}とかく.

$Y'=DF_{X_0}Y$によって与えられる線形系をX_0の近傍での線形化系という.

<u>線形化定理</u>　n次元の非線形系$X'=F(X)$の平衡点X_0が双曲的であるとするとき, X_0の近傍におけるこの非線形系の流れは, その線形化系の流れと共役になる.

3. 二種の生物の競争

$$\begin{cases} x' = x(1-ax-y) \\ y' = y(b-x-y) \quad (a,b>0) \end{cases}$$

x,yは種の個体数とし, ロジスティクス方程式$x'=x(1-ax)$に一方の種の成長率が, 他方の種の個体数に比例して減少することを仮定している.

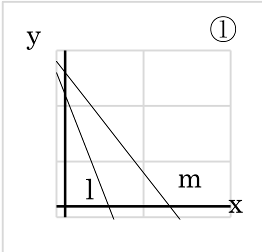
$x,y\geq 0$のみ考える.

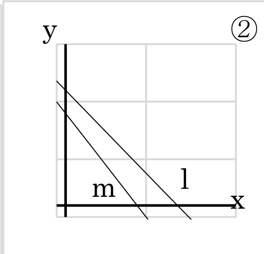
まずヌルクラインを見るとそれぞれ以下の通りである.

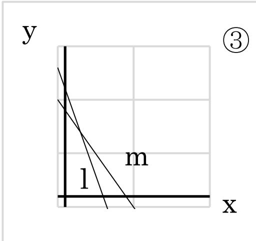
x–ヌルクライン… $x=0$ (y軸), $l: y=1-ax$

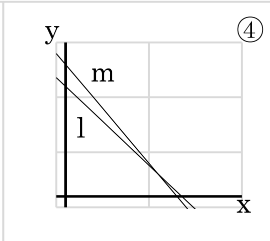
y–ヌルクライン… $y=0$ (x軸), $m: y=b-x$

これらヌルクラインによるグラフは以下の四通りに分別できる.









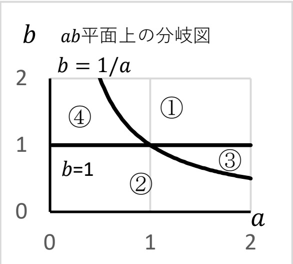
いずれの場合も平衡点はy軸$\cap x$軸, y軸$\cap m$, x軸$\cap l$, $l\cap m$の4つありそれぞれ$(0,0),(0,b),\left(\frac{1}{a},0\right)$, $\left(\frac{b-1}{1-a},\frac{1-ab}{1-a}\right)$ $(a\neq 1)$である. 平衡点の近傍の流れを見るため各点におけるヤコビ行列を計算し固有値λを求めると, 平衡点$(0,0)$では$\lambda=1,b$, 平衡点$(0,b)$では$\lambda=-b,1-b$, 平衡点$\left(\frac{1}{a},0\right)$では$\lambda=-1,b-\frac{1}{a}$, 平衡点$\left(\frac{b-1}{1-a},\frac{1-ab}{1-a}\right)$では

$$\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-\frac{4(1-b)(1-ab)}{1-a}}}{2}$$となる.

a,bの大きさに注意して固有値の符号をみる. 平衡点$(0,0)$では, $b>0$より固有値は常どちらも正になり平衡点は源点である. 平衡点$(0,b)$では, $b>1$のとき, 固有値はどちらも負になり平衡点は沈点となる. $b<1$のとき, 固有値は正と負になり平衡点は鞍点となる. 平衡点$\left(\frac{1}{a},0\right)$では, $ab>1$のとき, 固有値は正と負になり鞍点なる. $ab<1$のとき固有値はどちらも負になり平衡点は沈点になる. 平衡点$\left(\frac{b-1}{1-a},\frac{1-ab}{1-a}\right)$では, $a<1,b>1,ab<1$のとき固有値は正と負になり平衡点は鞍点になる. $a>1,b<1,ab>1$のとき固有値はどちらも負になり平衡点は源点となる.

1: 日大理工・院（前）・数学

これらをふまえると以下のような平衡点の分岐図になる.



4. 二種の生物の競争と移出

$$\begin{cases} x' = x(1-ax-y) \\ y' = y(b-x-y)+h\,(a,b>0) \end{cases}$$

ここではyは一定の割合で個体が移出する.

$x,y \geq 0$のみ考える. ここでは$h<0$として考える.

まずヌルクラインを見るとそれぞれ以下の通りである.

x-ヌルクライン…$x=0$ (y軸), $l: y = 1-ax$

y-ヌルクライン…$n: y(b-x-y)+h=0$

$h=-1, h<-1, -1<h<0$ で場合分けして考える.

$h=-1$のときy軸との交点を見ると

$\left(0, \frac{b \pm \sqrt{b^2-4}}{2}\right)$であるから$b=2$のとき 1 個

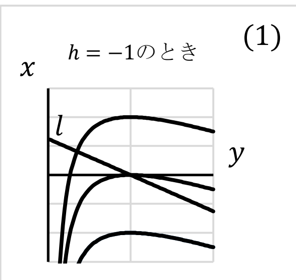
$b>2$のとき 2 個交点がある. またグラフ (1) よりlとnとの交点は$b \geq 2$のとき常に一つある. 従って$b<2$のとき交点 0 個, $b=2$のとき交点 1 個, $b>2$のとき交点 3 個となる.

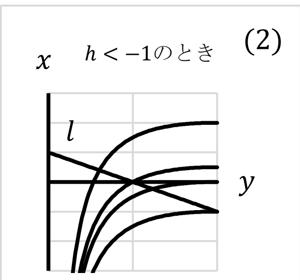
$h<-1$のときy軸との交点を見ると

$\left(0, \frac{b \pm \sqrt{b^2+4h}}{2}\right)$であるから$b \geq 2\sqrt{-h}$で交点がある. またグラフ (2) より$b \geq 1-h$のとき$l$と$n$は 1 個交点を持つ.

したがって$b<2\sqrt{-h}$のとき交点 0 個, $b=2\sqrt{-h}$のとき交点 1 個, $2\sqrt{-h}<b \leq 1-h$のとき交点 2 個,

$1-h<b$のとき交点 3 個となる.





$-1<h<0$のときy軸との交点を見ると

$\left(0, \frac{b \pm \sqrt{b^2+4h}}{2}\right)$であるから$b \geq 2\sqrt{-h}$で交点がある.

lがnに接することを見るために式変形すると

$l: x = -\frac{y}{a}+\frac{1}{a}$, $n: x = b-y+\frac{h}{y}$となる.

傾きが等しいこと, $a>0, x,y \geq 0$より,

$a > \frac{1}{1+h} > 1$のときにl,nは交点をもつ.

lとnの交点の判別式$D = \left(b-\frac{1}{a}\right)^2 - 4h\left(\frac{1}{a}-1\right)$の符号

を考えると$b \geq \frac{1}{a}+2\sqrt{-h}\sqrt{1-\frac{1}{a}}$のとき, または

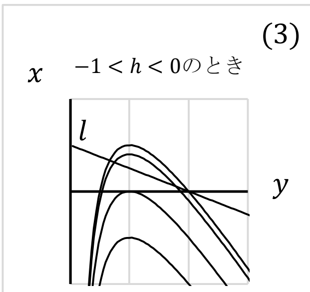
$b \leq \frac{1}{a}-2\sqrt{-h}\sqrt{1-\frac{1}{a}}$のとき交点をもつ.

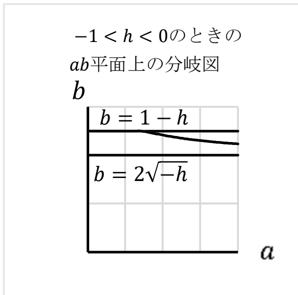
lとnの交点のy座標

$$y = \frac{\frac{1}{a}-b \pm \sqrt{\left(b-\frac{1}{a}\right)^2 - 4h\left(\frac{1}{a}-1\right)}}{2\left(\frac{1}{a}-1\right)}$$

の符号をみると$b \leq \frac{1}{a}-2\sqrt{-h}\sqrt{1-\frac{1}{a}}$のときは$y$が負になるため不適切. またグラフ (3) より$b \geq 1-h$のとき$l$と$n$の交点は, かならず 1 個ある.

これらをふまえると以下のような平衡点の分岐図になる.





参考文献

[1] Morris W. Hirsch ,Stephen Smale ,Robert L. Devaney 著, 桐木 紳, 三波 篤郎, 谷川 清隆, 辻井 正人 訳「Differential Equations,Dynamical Systems and an Introduction to Chaos 3rd edition」, 力学系入門 原著第 3 版　―微分方程式からカオスまで―,共立出版,2017

[2] 高橋陽一郎 著,力学と微分方程式,岩波書店,1996