P-4

# ニュートン中心力系の幾何学
**Newton Central Force Geometry**

梅津俊伸
Umetsu Toshinob

Abstract:We consider a differential equation system called the Newton central force system.We define the amount of energy and the angular momentum acting on the object, and actually solve the Newton central force system.
We find out how it behaves.

## １　ニュートンの第２法則

質点の運動に関して, $F(X) = ma$が成り立つ.
$F(X)$は質点の位置$X \in \boldsymbol{R}^n$における力のベクトル, $m$は質点の質量、$a$は質点の加速度ベクトルである.

## ２　保存系

**定義**（**保存系**）滑らかな関数$U: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$で,
$F(X) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(X), \frac{\partial U}{\partial x_2}(X), \cdots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(X)\right)$
$= -gradU(X)$
を満たすものが存在する。このような力の場は保存的とばれる. これに伴う微分方程式系,

$$\begin{cases} X' = V \\ V' = \frac{1}{m}F(X) = -\frac{1}{m}\, gradU(X) \end{cases}$$

は保存系とよばれる. 関数$U$は、系のポテンシャルエネルギーと呼ばれる.
**定義**（**運動エネルギー**）質量$m$の動く任意の粒子$X(t)$に対して, 運動エネルギー$K$は$K = \frac{1}{2}m|V|^2$で定義される.
また、全エネルギーは相空間上で$E = K + U$と定義される.

**定理**（**エネルギー保存**）
$(X(t), V(t))$は保存系の解曲線であるとする. このとき, 全エネルギー$E$はこの解曲線に沿って一定である.

## ３　中心力の場

**定義**（**中心力の場**）力の場$F$が中心力の場であるとは, どの$X \in \boldsymbol{R}^n$に対しても$F(X)$が原点を向いているか, 原点と反対方向を向いているときである.

**命題**　$\boldsymbol{R}^3$の中心力の場内の粒子は, 常に原点を含む一定の平面内を動く.

ベクトル$m(X \times V)$を角運動量という。ここで$X \times V$は$X$と$V$のベクトル積のことである。
**系**（**角運動量保存**）中心力の場においては、任意の解曲線に沿って角運動量は一定である.

## ４　ニュートン中心力系

この系では太陽の周りを巡る１つの惑星の運動を扱う. 太陽は$\boldsymbol{R}^3$の原点に固定されているとし, 惑星は太陽に比べて質量が小さいので太陽に力を及ぼさないものとする. 太陽は、ニュートンの重力法則に従って惑星に力を及ぼす. この法則によると, 太陽は$X \in \boldsymbol{R}^3$に位置する惑星に$\frac{gm_s m_p}{r^2}$の大きさの力を及ぼす. ここで, $m_s$は太陽質量, $m_p$は惑星質量, $g$は重力定数, $r$は太陽と惑星間の距離である.
ニュートン法則から微分方程式　$m_p X'' = -gm_s m_p \frac{X}{|X|^3}$が得られる.
両辺を$m_p$で割り, 重力定数を$gm_s = 1$になるようにすると方程式は, $X'' = F(X) = -\frac{X}{|X|^3}$となる.
従って, 微分方程式系は,

$$\begin{cases} X' = V \\ V' = -\frac{|X|}{|X|^3} \end{cases}$$

となり, これはニュートン中心力系と呼ばれる.
これは中心力の場であり, 保存的であるからポテンシャルエネルギー$U(X)$が存在する.
求めると、$U(X) = -\frac{1}{|X|}$である.
$F(X)$は原点では定義されないものとする. 命題より保存中心力の場なので平面$\boldsymbol{R}^2$内を動く粒子と考えて議論をすすめることができる. ゆえに配位空間$C = \boldsymbol{R}^2 - \{0\}$内の解を見ることになる.
相空間を$P = \left(\boldsymbol{R}^2 - \{0\}\right) \times \boldsymbol{R}^2$と書く. すると相空間は各点$X \in C$における接ベクトル全体の集まりとして同一視できる. $T_X = \{(X, V) | V \in \boldsymbol{R}^2\}$とおく. $T_X$は$X$における配位空間の接平面である. このとき, 相空間$P = \cup_{X \in C} T_X$は配位空間の接空間である. これは$\boldsymbol{R}^4$の部分集合と同一視できる. エネルギー保存より全エネルギー$E$は解曲線に沿って一定であり, 運動エネルギー$K(V)$とポテンシャルエネルギー$U(X)$の和で表されるので$E(X, V) = K(V) + U(X)$が成り立つ. これは、$\frac{1}{2}|V|^2 - \frac{1}{|X|}$ (*)であった.
集合$\Sigma_h$は$P$の部分集合であり, $E(X, V) = h$となる点$(X, V)$全てからなるものとする.
集合$\Sigma_h$は全エネルギー$h$のエネルギー曲面と呼ばれる.
以下全エネルギー$h$の値によって場合分けをして$\Sigma_h$の構造を調べる.
(1) $h \geq 0$のとき, $\Sigma_h$は各$T_X$と$|V|^2 = 2(h + \frac{1}{|X|})$（(*)より）を満たす接ベクトルの円周上で交わる. $X$における接平面のこの円の半径は, $X \to 0$のとき$\infty$に向かい, $|X| \to \infty$のとき$\sqrt{2h}$へと収束する. (2) $h < 0$のとき, $|X| > -\frac{1}{h}$なら$T_X \cap \Sigma_h$にはベクトルがない. なぜなら, $|V|^2 < 0$を満たす$X$における接ベクトル$V$は存在し

日大理工・院（前）・数学

ないからである. $|X|=-\frac{1}{h}$のとき, $T_X$の零ベクトル$\Sigma_h$内に存在する. 従って、配位空間上の円$r=-\frac{1}{h}$は零速度曲線とよばれる. $X$が零速度曲線に囲まれた場所にいれば、$T_X$は接ベクトルの円周上でエネルギー曲面と交わる.
次に、配位空間に極座標$(r,\theta)$、接平面に新たな変数$(v_r\,,v_\theta)$を導入してみる. ここで,
$V=v_r(cos\theta,sin\theta)+v_\theta(-sin\theta,cos\theta)$とおく. すると系は座標$(r,\theta,v_r\,,v_\theta)$を使って,

$$\begin{cases} r'=v_r \\ \theta'=\frac{v_\theta}{r} \\ v_r'=-\frac{1}{r^2}+\frac{v_\theta^2}{r} \\ v_\theta'=-\frac{v_r v_\theta}{r} \end{cases}$$

と書ける. この座標で全エネルギーは$\frac{1}{2}({v^2}_r+{v^2}_\theta)-\frac{1}{r}=h$と書ける. 角運動量は$\ell=rv_\theta$と書ける.
集合$\Sigma_{h,\ell}$は相空間の点のうち, 全エネルギーが$h$で角運動量が$\ell$であるもの全てからなるものとする.
角運動量$\ell$の値によって$\Sigma_{h,\ell}$の構造は異なる.
以下角運動量$\ell$の値によって場合分けをして$\Sigma_{h,\ell}$の構造を調べる.
(1) $\ell=0$のとき$v_\theta=0$である.
$\ell=0$より$X\times V=0$だから$V$は$X$のスカラー倍であるから$V=\lambda(t)X=\lambda(t)r(cos\theta,sin\theta)$が成り立つ. ($\lambda(t)$はスカラー関数) ゆえに$\lambda(t)r=v_r$であり, $X$における接空間と$\Sigma_{h,0}$との交わりは$\pm v_r(cos\theta,sin\theta)$の形のちょうど２つのベクトルである. このベクトルは, どちらも原点と$X$を結ぶ直線上にある。方向は原点の方とその反対方向を向いている.
従って, $\Sigma_{h,0}$内の各々の解は原点を通る直線上にある.
また$v'_r=-\frac{1}{r^2}$より時間が経つにつれて$v_r$は減少し負になる, つまり速度ベクトルの向きが逆向きになる. よって解は原点を離れ直線に沿って動き零速度曲線に達し, 再び元の道をたどって原点に戻る.
この型の解は衝突・放出軌道と呼ばれる.
(2) $\ell\neq 0$のとき$X$が零速度曲線に囲まれた場所にあるとき、$v_\theta=\frac{\ell}{r}$が成り立つ.
全エネルギー公式より$r^2{v^2}_r=2hr^2+2r-\ell^2\cdots(**)$が成り立つ. $r^2{v^2}_r>0$より$2hr^2+2r-\ell^2>0$であるから$X\in\Sigma_{h,\ell}$の場合に$r$がとる値に制限がつく. $h<0$よりこの２次多項式のグラフは上に凸であることがわかる.
このグラフと$2hr^2+2r-\ell^2=0$との交点の数を調べる.
(ⅰ) $\ell^2>-\frac{1}{2h}$のとき, 交点がないので空間$\Sigma_{h,\ell}$は空である.
(ⅱ) $\ell^2=-\frac{1}{2h}$のとき, 交点は１個. このとき$r=-\frac{1}{2h}$は$\Sigma_{h,\ell}$内で取り得る唯一の$r$の値である. $(r,\theta)$における接平面内で, $v_r=0, v_\theta=-2h\ell$が成り立つ.
これは円閉軌道を表す. ($\ell<0$なら時計回り、$\ell>0$なら反時計回りに動く)
(ⅲ) $\ell^2<-\frac{1}{2h}$のとき, この多項式は$0<\alpha<-\frac{1}{2h}<\beta$なる２つの異なる根$\alpha,\beta$をもつ. $A_{\alpha,\beta}$を配位空間の円環領域$\alpha\leq r\leq\beta$とすると, 解は. $A_{\alpha,\beta}$内を動く.

**命題**　$h<0$かつ$\ell^2<-\frac{1}{2h}$とする. このとき, $\Sigma_{h,\ell}\subset P$は二次元トーラスである.
（証明）各$X\in A_{\alpha,\beta}$に対して, $T_X\cap\Sigma_{h,\ell}$内の接ベクトルの集合を計算する. $X$が円環の境界上にあるなら, 式(**)の右辺の２次形式は$0$となり, $v_r=0$だが, $v_\theta=\frac{\ell}{r}$である. ゆえに, $X$が円環の境界上にあるときは, $T_X\cap\Sigma_{h,\ell}$内に接ベクトルが唯一つある. $X$が１つ決まれば, $v_\theta$も1つに決まるからである.
$X$が$A_{\alpha,\beta}$の内部にあるとき$T_X\cap\Sigma_{h,\ell}$内に１組のベクトルがある。全エネルギー公式より,
${v^2}_r=\frac{1}{r^2}(2hr^2+2r-\ell^2)$だから
${v_r}^{\pm}=\pm\frac{1}{r}\sqrt{2hr^2+2r-\ell^2}, v_\theta=\frac{\ell}{r}$
が１組のベクトルである. このベクトルは$A_{\alpha,\beta}$において全て時計回りか反時計回りを向いている. なぜなら$v_\theta$が全ての$X$に対して, 同じ符号を持っているからである. だから, $\Sigma_{h,\ell}$のことは$A_{\alpha,\beta}$上に与えられた１組のグラフとみることができる. 正のグラフは${v^+}_r$で与えられ, 負のグラフは${v^-}_r$で与えられる. この２つは境界円$r=\alpha$と$r=\beta$に沿ってつながっている. これでトーラスとなる. (証明終了)
命題の条件下で解はトーラスの表面上を動いていることがわかる.

参考文献
MorrisW.Hirsch,StephenSmale,Robert L.Devaney
:力学系入門-微分方程式からカオスまで-共立出版