P-5

バナッハの不動点定理と常微分方程式系の解の一意存在

Banach fixed point theorem and the unique existence of solutions to a certain system of ODE's

○須賀光穂
Mitsuho Suka[1]

Abstract: In this article, we prove the unique existence of solutions to the SIR model by using Banach fixed point theorem.

感染症にかかってしまったグループが大きなグループに入った場合を考える。時間が経つとどういうことが起きるのか、この病気はすぐに消えてしまうのか、集団に感染症が広まる様子を表す連立方程式を導く。我々が考えるモデルにおいて

$$\begin{cases} S & : \text{まだ感染していない人} \\ I & : \text{感染してしまった人} \\ R & : \text{回復した人} \end{cases}$$

とする。伝染は次の規則に従うものとする。

1. 総人口を N とする。
   (病気と無関係な出生や死亡、出入国者は無視する)
2. 新たな感染者の変化率は、S の人数と I の人数の積に比例する。
3. I からは、I の大きさに比例する率でメンバーが減る。

また、治った人は再発せず、潜伏期間は無視できるほど短いものとする。

規則 1.〜3. より、$S(t), I(t), R(t)$ は次の連立微分方程式に従う。

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -rSI, \\ \dfrac{dI}{dt} = rSI - \gamma I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases}$$

ここで、r は感染率、γ は除外率と呼ばれる正の定数である。この連立方程式より $(S(t)+I(t)+R(t))' = 0$ であるから、総人口 $N = S(t)+I(t)+R(t)$ は一定である。この連立方程式の最初の 2 式は R を含まないので、S, I に関する最初の 2 式のみを考えればよい。

$u = (S, I), f(u) = (-rSI, rSI - \gamma I), u_0 = (S_0, I_0)$ とおく。このとき、今考えている連立微分方程式は $u' = f(u)$ と表される。この講演では、以下の主張を証明する。

定理

任意の $u_0 \in \mathbb{R}^2$ に対し、ある $T > 0$ が存在し、初期値問題

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \ \ (0 \le t \le T), \ \ u(0) = u_0, \\ u \in \left(C^1([0,T])\right)^2 \end{cases}$$

は唯一つの解を持つ。

この定理の証明には、以下の定理を利用する。

バナッハの不動点定理

X をノルム $\|\cdot\|$ を備えたバナッハ空間、A を X の閉部分集合、$F : A \to X$ を $F(A) \subset A$ と

$$^{\exists}\theta \in [0,1) \text{ s.t. } ^{\forall}x, y \in A, \ \|F(x) - F(y)\| \le \theta \|x - y\|$$

を満たす写像とする。このとき、$F(x) = x$ を満たす $x \in A$ が唯一つ存在する。

初期値問題 (P) は

$$(2) \qquad \begin{cases} u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t f(u(s))ds \ \ (0 \le t \le T), \\ u \in \left(C^0([0,T])\right)^2 \end{cases}$$

と同値であることに注意する。

$X = \left(C^0([0,T])\right)^2$ とし、$u = (S, I) \in X$ のノルムを

$$\|u\| = \sup_{t \in [0,T]} |S(t)| + \sup_{t \in [0,T]} |I(t)|$$

で定義する。X はこのノルムによりバナッハ空間になる。

$u \in X$ に対し

$$F(u)(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))ds \quad (0 \le t \le T)$$

とおく。こうすると、初期値問題 (P) は X における f の不動点を求める問題になる。

$A = \left\{ u \in X \mid \|u\| \le M \right\}$ とおく。A は X の閉部分集合である。

1：日大理工・院 (前)・数学

以下、M, T を適当にとることで F が A 上の縮小写像になることを示す。

まず、$F(A) \subset A$, つまり $\|u\| \leq M$ ならば $\|F(u)\| \leq M$ が成り立つような M, T の条件を求める。$u = (S, I) \in A$ に対し

$$\begin{aligned}
&\|F(u)\| \\
&= \left\| \left(S_0 + \int_0^t -rS(s)I(s)ds, \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. I_0 + \int_0^t (rS(s)I(s) - \gamma I(s))ds \right) \right\| \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \left| S_0 + \int_0^t -rS(s)I(s)ds \right| \\
&\quad + \sup_{t\in[0,T]} \left| I_0 + \int_0^t (rS(s)I(s) - \gamma I(s))ds \right| \\
&\leq |S_0| + r \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t M^2 ds \\
&\quad + |I_0| + \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t (rM^2 + \gamma M)ds \\
&\leq |S_0| + r\int_0^T M^2 ds + |I_0| + \int_0^T (rM^2 + \gamma M)ds \\
&= |S_0| + |I_0| + (2rM^2 + \gamma M)T
\end{aligned}$$

が成り立つ。従って、

$$|S_0| + |I_0| < M,\ 0 < T \leq \frac{M - (|S_0| + |I_0|)}{2rM^2 + \gamma M} \tag{3}$$

ならば、$F(A) \subset A$ が成り立つ。

次に、F が縮小写像になるための M, T の条件を考える。$u = (S_1, I_1),\ v = (S_2, I_2) \in A$ に対し

$$\begin{aligned}
&\|F(u) - F(v)\| \\
&= \left\| \left(\int_0^t -r(S_1(s)I_1(s) - S_2(s)I_2(s))ds, \right.\right. \\
&\quad \left.\left. \int_0^t \{r(S_1(s)I_1(s) - S_2(s)I_2(s)) - \gamma(I_1(s) - I_2(s))\}ds \right) \right\| \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t r|S_1(s)I_1(s) - S_2(s)I_2(s)|ds \\
&+ \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t |r(S_1(s)I_1(s) - S_2(s)I_2(s)) - \gamma(I_1(s) - I_2(s))|ds \\
&\leq T\Big\{ \sup_{s\in[0,T]} Mr(|S_1(s) - S_2(s)| + |I_1(s) - I_2(s)|) \\
&+ \sup_{s\in[0,T]} \Big(Mr(|S_1(s) - S_2(s)| + |I_1(s) - I_2(s)|) \\
&\qquad + \gamma|I_1(s) - I_2(s)| \Big) \Big\} \\
&\leq T\Big\{ Mr\|u - v\| + Mr\|u - v\| + \sup_{s\in[0,T]} \gamma|I_1(s) - I_2(s)| \Big\} \\
&\leq T\Big(2Mr\|u - v\| + \gamma\|u - v\| \Big) \\
&= T(2Mr + \gamma)||u - v||
\end{aligned}$$

が成り立つ。従って、$0 \leq T(2Mr + \gamma) < 1$ であれば、F は A 上の縮小写像である。

任意の初期値 $u_0 = (S_0, I_0)$ に対し、$M > |S_0| + |I_0|$ を満たす M をとり、$T = \dfrac{M - (|S_0| + |I_0|)}{2(2rM^2 + \gamma M)}$ とすれば、条件 (3) が成り立つと同時に

$$0 < T(2Mr + \gamma) = \frac{M - (|S_0| + |I_0|)}{2M} \leq \frac{1}{2} < 1$$

でもあるから、F は A 上の縮小写像になる。従って、バナッハの不動点定理より $F(u) = u$ を満たす $u \in A$ が唯一つ存在する。

1. 参考文献

[1] M. ブラウン,『微分方程式　下』（一樂 重雄, 河原 正治, 河原 雅子, 一樂 祥子 訳）, シュプリンガー・ジャパン (2012)

[2] J. ヨスト,『ポストモダン解析学』（小谷 元子 訳）, シュプリンガー・ジャパン (2012)