P-6

Hille-吉田の定理と熱方程式について

○福岡 慶樹 [1]

Abstract: We study existence and uniqueness for solutions of evolution problems $du/dt + Au = 0$ on $[0, \infty)$. For unbounded maximal monotone operators, we introduce the Hille-Yosida Theorem, which gives a sufficient condition for solvability of the evolution problem. Finally, for application of the theorem, solvability of the initial problem of the heat equation is considered.

1. Hille-吉田の定理

H を Hilbert 空間とする. 本稿では, 以下の微分方程式を考察する:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad [0, \infty) \text{ 上}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $u_0 \in H$ とし, A は H から H への線形作用素とする. まず本稿における主結果を述べるために極大単調作用素を紹介する.

定義 1 (極大単調) 線形作用素 $A : D(A) \subset H \to H$ が単調であるとは, 任意の $v \in D(A)$ に対して $(Av, v)_H \geq 0$ となることをいう. 単調作用素 $A : D(A) \subset H \to H$ が極大単調であるとは, 恒等作用素 $I : H \to H$ に対し $I + A$ が全射であることをいう.

次に, 本稿での主結果である Hille-吉田の定理を述べる.

定理 2 (Hille-吉田の定理) $A : D(A) \subset H \to H$ を極大単調作用素とする. このとき, 任意の $u_0 \in D(A)$ に対して, ある $u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A))$ が唯一つ存在して, (1) を満たす. さらに, 任意の $t \geq 0$ に対して,

$$||u(t)||_H \leq ||u_0||_H,$$
$$\left|\left|\frac{du}{dt}(t)\right|\right|_H = ||Au(t)||_H \leq ||Au_0||_H$$

が成り立つ.

Hille-吉田の定理で重要なのは, A が有界作用素とは限らないことである. A が有界作用素の場合については, Cauchy-Lipschitz-Picard の定理により (1) の可解性が知られている.

初期値 u_0 を H の元とするときの (1) の可解性を示すために, 作用素に関する次のクラスを導入する.

定義 3 線形作用素 $A : D(A) \subset H \to H$ が対称であるとは, 任意の $u, v \in D(A)$ に対して, $(Au, v)_H = (u, Av)_H$ となることをいう. 線形作用素 $A : D(A) \subset H \to H$ が自己共役であるとは, $A^* = A$ となることをいう.

A が自己共役な極大単調作用素ならば, 初期値 u_0 を H からとることが出来る.

定理 4 $A : D(A) \subset H \to H$ を自己共役な極大単調作用素とする. このとき, 任意の $u_0 \in H$ に対して, ある $u \in C([0, \infty); H) \cap C^1((0, \infty); H) \cap C((0, \infty); D(A))$ が唯一つ存在して,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad (0, \infty) \text{ 上}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

を満たす. また, 任意の $t \geq 0$ に対して,

$$||u(t)||_H \leq ||u_0||_H,$$
$$\left|\left|\frac{du}{dt}(t)\right|\right|_H = ||Au(t)||_H \leq \frac{1}{t}||u_0||_H$$

が成り立つ.

2. 定理 2 の証明の概略

解の存在性のみ述べる. 非有界作用素を近似する作用素として, 次の作用素を導入する.

定義 5 極大単調作用素 $A : D(A) \subset H \to H$ と $\lambda > 0$ に対して,

$$J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}, A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

と定める. J_λ を A のレゾルベント, A_λ を A の吉田近似という.

存在性の証明は 4 つの Step で行われる. 最初の Step では, 次の微分方程式 $(1)_\lambda$ が可解であることを示す:

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0, \quad [0, \infty) \text{ 上}, \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases}$$

これは A_λ が有界作用素であることと Cauchy-Lipschitz-Picard の定理を用いればよい.

1: 日大理工・院 (前)・数学

次の Step では, A を吉田近似 A_λ で近似できることを示す. すなわち, $v \in D(A)$ に対して, $\lambda \to 0$ のとき $A_\lambda v \to Av$ であることを示す. A_λ は単に A を近似しているだけでなく極大単調であり, $v \in D(A)$ と $\lambda > 0$ に対して $||A_\lambda v||_H \leq ||Av||_H$ といったよい性質を持っている. A_λ に関するこれらの性質を用いて次の評価が得られる.

補題 6 $u_0 \in D(A)$ と $\lambda > 0$ に対し, A_λ を吉田近似とする. このとき, $u_\lambda \in C^1([0,\infty);E) \cap C([0,\infty);D(A))$ が $(1)_\lambda$ を満たすならば, 任意の $t \geq 0$ に対して,

$$||u_\lambda(t)||_H \leq ||u_0||_H,$$
$$\left|\left|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right|\right|_H = ||A_\lambda u_\lambda(t)||_H \leq ||Au_0||_H,$$

が成り立つ.

3 つ目の Step では, $(1)_\lambda$ の解 u_λ が $\lambda \to +0$ としたとき収束することを示す. $T > 0$ に対して $u_\lambda(t)$ は $\lambda \to +0$ のとき $u(t)$ に $[0,T]$ 上一様収束することを示せる. 実際 $\lambda, \mu > 0$ に対して,u_λ, u_μ をそれぞれ $(1)_\lambda, (1)_\mu$ の解とすると, $(u_\lambda - u_\mu)' + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$ となる. ただし

$$' := \frac{d}{dt}$$

である. これにより,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_\lambda - u_\mu||_H^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu\ ,\ u_\lambda - u_\mu)_H = 0 \quad (3)$$

とわかる. また $J_\lambda u_\lambda, J_\mu u_\mu$ を第二成分にはさみ, A_λ の極大単調性を用いて

$$\begin{aligned}&(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu)_H \\ &\geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)_H \end{aligned} \quad (4)$$

とわかる. ここで $A_\lambda = AJ_\lambda$ も用いた. (3), (4), 補題 6 と Schwarz の不等式から,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_\lambda - u_\mu||_H^2 \leq 2(\lambda+\mu)||Au_0||_H^2$$

となる. 両辺を 0 から t まで積分して,

$$||u_\lambda(t) - u_\mu(t)||_H^2 \leq 4(\lambda+\mu)t||Au_0||_H^2 \quad (5)$$

とわかる. よって任意の $t \geq 0$ に対して, $\lambda \to +0$ のとき $u_\lambda(t) \to u(t) \in H$ となる. (5) で $\mu \to 0$ とすれば, $[0,T]$ 上で

$$||u_\lambda(t) - u(t)||_H \leq 2\sqrt{\lambda T}||Au_0||_H$$

とできる. よって $u_\lambda(t)$ は $\lambda \to +0$ のとき $u(t)$ に $[0,T]$ 上一様収束するとわかる.

さらに $u_0 \in D(A^2)$ を仮定するとき, $T > 0$ に対して $u_\lambda'(t)$ は $\lambda \to +0$ のとき $u'(t)$ に $[0,T]$ 上一様収束することを示せる.

最後の Step では, Step3 の u が (1) の解であることを示す. まず $u_0 \in D(A^2)$ とすると $\lambda \to +0$ のとき $J_\lambda u_\lambda \to u$ となる. ここで $||(I+\lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ を用いた. $(1)_\lambda$ を $u_\lambda'(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0$ の形で書けば, A が閉作用素であることを用いて, $t \in [0,T]$ 上 $u'(t) + Au(t) = 0$ が成り立つこと, すなわち u が (1) を満たしていることがわかる. $D(A^2)$ が $D(A)$ について稠密であることを示せば定理 2 が結論付けられる.

3. 熱方程式への応用

次の熱方程式を考える:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \text{ 上}, \\ u(x,0) = u_0(x), & \mathbb{R}^N \text{上}.\end{cases} \quad (6)$$

ただし,

$$\Delta := \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

はラプラシアンである.

結果を述べる前に必要となる関数空間を導入する.

$$L^2 := \left\{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \text{可測}; \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2\,dx < \infty\right\},$$
$$H^k := \left\{f \in L^2; D^\alpha f \in L^2 \text{ for all } |\alpha| \leq k\right\}.$$

ただし, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ は多重指数とし,

$$\partial_{x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j},$$
$$D^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_N}^{\alpha_N}},$$

である. $u \in L^2$ に対して, L^2 ノルムを $||u||_{L^2}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx$ と定める.

定理 4 を用いることで (6) の可解性がわかる.

定理 7 任意の $u_0 \in L^2$ に対して, ある関数 $u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ が唯一つ存在して,

$$u \in C\left([0,\infty);L^2\right) \cap C^1\left((0,\infty);L^2\right) \cap C\left((0,\infty);H^2\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \text{ 上},$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad \mathbb{R}^N \text{上},$$

となる. 最後に, $u \in L^2(0,\infty;H^1)$ であり, 任意の $T > 0$ に対して,

$$\frac{1}{2}||u(T)||_{L^2}^2 + \int_0^T ||\nabla u(t)||_{L^2}^2\,dt = \frac{1}{2}||u_0||_{L^2}^2 \quad (7)$$

が成り立つ.

4. 参考文献

[1] H. Brezis, “Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,” Springer, 2010.