P-7

確率微分方程式に対する大偏差原理とその応用

The large deviation principle for stochastic differential equations and its applications

○松本 勇樹
*Yuki Matsumoto[1]

Abstract: In this article, we introduce the large deviation principle for stochastic differential equations, and explain an exit ploblem as its application.

1. 導入

ω を d 次元 Brown 運動とし, $b:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\ \sigma:\mathbb{R}^{2d}\to\mathbb{R}^{2d}$ は有界で,Lipchitz 連続であるとする．このとき $x\in\mathbb{R}^d,\ \varepsilon>0$ に対し, 次の d 次元確率微分方程式

$$dx_t=b(x_t)dt+\sqrt{\varepsilon}\sigma(x_t)d\omega_t,\ x_0=x$$

は一意的な解 $X^{\varepsilon,x}$ をもつ. ここで, 常微分方程式

$$dx_t=b(x_t)dt,\ x_0=0$$

の解を X^x とおくと, $\varepsilon\to 0$ のとき $X^{\varepsilon,x}$ は, 時間幅 T を決めるごとに X^x に一様に確率収束する. すなわち, 任意の $\delta>0$ に対し次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{\varepsilon,x}-X_t^x|\geq\delta\}\right)=0 \tag{1}$$

この収束の詳細な情報を与えるのが大偏差原理である.

本講演では, $x^{\varepsilon,x}$ に関する大偏差原理と, その応用としての脱出時刻の極限について概説する.

2. 大偏差原理

X を距離空間とし, $\{Q_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を $\mathcal{B}(X)$ 上の確率測度の族とする. このとき大偏差原理とは, 任意の $A\in\mathcal{B}(X)$ に対し $Q_\varepsilon(A)$ の $\varepsilon\to 0$ での指数的評価を与えるものである. 実際の定義は次のようになる.

定義 1 $I:X\to[0,\infty]$ とする. 任意の $\alpha<\infty$ に対し $I^{-1}([0,\alpha])$ がコンパクト集合となるとき, I はよい速度関数であるという. さらに次の 2 つの評価が成り立つとき, I をよい速度関数として $\{Q_\varepsilon\}$ に対する大偏差原理が成り立つ, という.

上からの評価 F を X 上の閉集合とすると, 次が成り立つ.

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log Q_\varepsilon(F)\leq-\inf_{x\in F}I(x)$$

下からの評価 U を X 上の開集合とすると, 次が成り立つ.

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log Q_\varepsilon(U)\geq-\inf_{x\in U}I(x)$$

I をよい速度関数として $\{Q_\varepsilon\}$ に対する大偏差原理が成り立つとき, 任意の $A\in\mathcal{B}(X)$ に対し次が成り立つ.

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log Q_\varepsilon(\mathring{A})\leq Q_\varepsilon(A)\leq\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log Q_\varepsilon(\bar{A})$$

$X^{\varepsilon,x}$ に対する大偏差原理について述べる. 任意の $T>0$ に対し, $\|f\|_T=\max_{t\in[0,T]}|f_t|$ は $C([0,T])$ 上のノルムとなる. ここで $x\in\mathbb{R}^d,\ f\in C([0,T])$ に対し

$$\begin{aligned}I_{x,T}(f)=\inf\Bigg\{&\frac{1}{2}\int_0^t|g_s|^2ds;\ g\in L^2([0,T],\mathbb{R}^d),\\&f_t=x+\int_0^t b(g_s)ds+\int_0^t\sigma(g_s)ds,\\&t\in[0,T]\Bigg\}\end{aligned}$$

と定めると, 次が成り立つ.

定理 2 *(Friedlin-Wentzell の定理, [1], Theorem 5.6.7)* $T>0,\ x\in\mathbb{R}^d$ を任意にとって固定し, $\varepsilon>0$ に対し $(x_t^{\varepsilon,x})_{t\in[0,T]}$ の $C([0,T])$ への分布を Q_ε とおく. このとき $I_{x,T}$ をよい速度関数として $\{Q_\varepsilon\}$ に対する大偏差原理が成り立つ.

この定理より, $T,\delta>0,\ x\in\mathbb{R}^d$ を任意にとって固定し $F=\{f\in C([0,T]);\|f-X^x\|_T\geq\delta\}$ とおくと

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log P\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{\varepsilon,x}-X_t^x|\geq\delta\}\right)\leq-\inf_{f\in F}I_{x,T}(f)$$

が成り立つことがわかる. この事実から, (1) の収束は $I_{x,T}$ に依存する指数的収束となることがわかる.

$x=0,\ b\equiv 0,\ \sigma\equiv 1$ のときの 定理 2 が Schilder の定理 [2] である. この証明と同様に, 時間方向について離散化したもので $X^{\varepsilon,x}$ を近似し (Wong-Zakai 近似), 離散化したものに対しての解析を経ることで, 定理 2 は示される.

3. 脱出問題

G を $\mathbb{R}^d$ 上の有界開集合とし, $\varepsilon>0,\ x\in\mathbb{R}^d$ に対し $\tau_{\varepsilon,x}=\inf\{t\geq 0;X_t^{\varepsilon,x}\in\partial G\},\ Y^{\varepsilon,x}=X^{\varepsilon,x}_{\tau_{\varepsilon,x}}$ とおく. $\tau_{\varepsilon,x}$

1: 日大理工・院 (前)・数学

は $X^{\varepsilon,x}$ の ∂G への到達時刻, つまり G からの脱出時刻を意味している. ここでは $\tau_{\varepsilon,x}$ の $\varepsilon \to 0$ での挙動を論じる.

$\check{x} \in G$ とし, 次の 2 つの仮定が成り立つ状況を考える.

仮定 1 任意の $x \in G,\ t > 0$ に対し $X_t^x \in G$ となる.

仮定 2 任意の $x \in \bar{G}$ に対し $\lim_{t\to\infty} X_t^x = \check{x}$ となる.

このとき X^x は G 内にとどまりながら $\check{x}$ に近づいていく. 一方 $a \equiv \sigma^t\sigma$ とおくと, 次が成り立つ.

定理 3 *([2], 命題 5,15)* 定数 $c > 0$ が存在し

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c|\xi|^2 \ \ x \in G,\ \xi \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

が成り立つと仮定する. このとき任意の $x \in G,\ \varepsilon > 0$ に対し $P(\tau_{\varepsilon,x} < \infty) = 1$ が成り立つ.

つまり, (2) および仮定 1,2 が成り立つとき, X^x は絶対に ∂G に到達しないが, $X^{\varepsilon,x}$ は確率 1 で ∂G に到達することがわかる. この状況下では, X^x だけでは $\tau_{\varepsilon,x}$ についての情報は得られない. しかし定理 2 を用いると,$\tau_{\varepsilon,x}$ の $\varepsilon \to 0$ での挙動についての詳細な情報が得られる.

$x, y \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$V(x,y,t) = \inf\{I_{x,t}(f);\ f \in C([0,t]), f_t = y\},\ \ t > 0$$
$$V(x,y) = \inf_{t>0} V(x,y,t)$$

と定め $\bar{V} = \inf_{z\in\partial G} V(\check{x}, z, t)$ とおく. この下で仮定を並べる.

仮定 3 $\bar{V} < \infty$

仮定 4 $\rho > 0$ に対し

$$D_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; |x-z| + |y-z| \leq \rho \text{ を満たす } z \in \partial G \cup \{\check{x}\} \text{ が存在する }\}$$

とおく. この下で, 以下を満たす $M, \tilde{\rho} > 0,\ T : (0,\tilde{\rho}] \to [0,\infty)\ \big(T(\rho) \to 0\ (\rho \to 0)\big)$ が存在する：任意の $\rho \in (0,\tilde{\rho}],\ (x,y) \in D_\rho$ に対し, 以下を満たす $\mathcal{B}([0,\infty))$-可測関数 u が存在する.

1. $\sup_{t\geq 0} u_t \leq M$
2. $d\psi_t = b(\psi_t)dt + \sigma(\psi_t)u_t dt,\ \psi_0 = x$
 の解を ψ^x とおくと $\psi^x_{T(\rho)} = y$ となる.

定理 2 を用いると次が得られる.

定理 4 *([1], Theorem 5.7.11)* 仮定 *1〜4* が成り立つとすると, 以下が成り立つ.

1. 任意の $x \in G$ に対し
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log E[\tau_{\varepsilon,x}] = \bar{V}$$
が成り立つ. さらに任意の $\delta > 0$ に対し次が成り立つ.
$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\left(\exp\left(\frac{\bar{V}-\delta}{\varepsilon}\right) < \tau_{\varepsilon,x} < \exp\left(\frac{\bar{V}+\delta}{\varepsilon}\right)\right) = 1$$
2. ∂G 上の閉集合 N は $\inf_{z\in N} V(0,z) > \bar{V}$ を満たすとする. このとき任意の $x \in G$ に対し, $\lim_{\varepsilon\to 0} P(Y^{\varepsilon,x} \in N) = 0$ となる. 特に, 任意の $z \in \partial G \setminus \{z^*\}$ に対し $V(0,z^*) < V(0,z)$ となる, $z^* \in \partial G$ が存在するとき, 任意の $x \in G,\ \delta > 0$ に対し次が成り立つ.
$$\lim_{\varepsilon\to 0} P(|Y^{\varepsilon,x} - z^*| < \delta) = 1 \tag{3}$$

4. 脱出時刻での値

ここでは $Y^{\varepsilon,x}$ の $\varepsilon \to 0$ での挙動を論じる.

定理 5 *([2], 定理 5.14)* (2) が成り立つとし, σ, b の各成分は G で C^1 級であるとする. また $f \in C^3(\partial G)$ とし, ∂G は C^3 級であるとする. また任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 微分作用素 $\mathcal{A}_\varepsilon$ を

$$\mathcal{A}_\varepsilon\varphi(x) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)$$

と定める. このとき *Dirichlet* 問題

$$\mathcal{A}_\varepsilon u(x) = 0,\ \ x \in G$$
$$u(x) = f(x),\ \ x \in \partial G$$

は $C^2(G) \cap C(\bar{G})$ の範囲で一意解 u^ε をもつ. さらに任意の $x \in G$ に対し,$X^{\varepsilon,x}$ の $C([0,\infty))$ への分布に対する期待値を E_x とおくと, 次が成り立つ.

$$u^\varepsilon(x) = E_x[f(Y^{\varepsilon,x})] \tag{4}$$

定理 4 の (3), 定理 5 の (4) を合わせると, 定理 4 (2) の z^* が存在し 定理 5 の仮定が成り立つとき, 任意の $x \in G$ に対し $\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x) = f(z^*)$ となることがわかる.

5. 参考文献

[1] A Dembo, O. Zeitouni, Large Deviations Techniques and Applications, 2nd ed. Springer, 1998.

[2] 舟木直久, 確率微分方程式, 岩波書店, 2005.