H-27

IGAはり要素における集中荷重載荷方法の検討

Study on the Loading Method of Concentrated Load for IGA Beam Elements

○唐澤奈央子 [1]，長谷部寛 [2]

Naoko Karasawa[1]，Hiroshi Hasebe[2]

Abstract: Finite element analysis is used for detailed investigation in structural design of bridges. There is a possibility of geometry error in the process of mesh generation. Isogeometric analysis (IGA), which has attracted much attention in recent years, is a method that can keep an exact geometry with the small number of elements by using spline functions as basis functions for approximating functions. We aim to use IGA in the structural design of bridges. In this study, we constructed beam elements suitable for IGA and investigated how to apply concentrated loads, which is one of the problems of IGA. As a result, it was confirmed that high convergence rate of relative error was obtained. Moreover, the proposed the method of applying concentrated load was effective.

1.　はじめに

橋梁の構造解析には有限要素解析（以下 FEM）が広く用いられているが，１次の形状関数を用いることが多いため要素を細かく分割し，形状を近似して曲線や曲面の解析を行っている．一方，他分野で実用化されてきたアイソジオメトリック解析[1]（以下 IGA）は近似関数の基底関数に CAD で用いられるスプライン関数を用いることで少ない要素数でも厳密な形状の解析を行うことができる解析手法である．本研究は IGA を橋梁の構造解析に導入すべく，IGA に対応したはり要素（以下 IGA はり要素）の構築に向けて検討を行う．

橋梁の構造解析では集中荷重を載荷するケースを検討することも多い．FEM の場合，任意の位置に節点を配置することで任意の位置に集中荷重を載荷することができる．一方 IGA の場合，任意の位置に要素を分割するパラメータであるノットを挿入しても，未知変数であるコントロールポイントの位置を自由に決められないため，任意の位置に集中荷重を載荷することが難しい．

そこで本研究は IGA はり要素の任意の位置に集中荷重を載荷する方法として，任意の位置を挟むようにノットを２つ挿入し，ノットの間の要素に対して等分布荷重を載荷するといった，近似的に集中荷重を与える方法を検討した．その結果，集中荷重の作用する問題に対して理論解に漸近する解を得ることができた．

2.　B-Spline 基底関数

B-Spline 曲線$\mathbf{C}(\xi)$はコントロールポイントの座標値により構成される位置ベクトル$\mathbf{B}_i$と B-Spline 基底関数$N_i^p(\xi)$(式(2))の線形結合として式(1)で表される．

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_i^p(\xi)\mathbf{B}_i \tag{1}$$

・$p = 0$の場合

$$N_i^0(\xi) = \begin{cases} 1\ (\ \xi_i \le \xi \le \xi_{i+1}) \\ 0\ \ otherwise \end{cases} \tag{2a}$$

・$p \ge 1$の場合

$$N_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(\xi) \tag{2b}$$

ここで，nはコントロールポイント数，pは次数，iはコントロールポイントの番号，ξ_iはノットと呼ばれるパラメータであり，局所座標値である．

3.　支配方程式と IGA はり要素の定式化

支配方程式にはベルヌーイ・オイラーはりの微分方程式を採用し(式(3))，弱形式化した後(式(4))，Galerkin 法に基づいて離散化した(式(5))．

たわみの近似関数は IGA で用いられるスプライン関数がC^{p-1}連続であり，微分しても要素間の連続性は自動的に保持されるという考えから，未知変数にたわみ角を含ませずに式(6)のように構成した．

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4} = q \tag{3}$$

$$EI\int_0^L \frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{d^2\widehat{w(x)}}{dx^2}dx = \int_0^L q\,\widehat{w(x)}dx \tag{4}$$

1：日大理工・院（前）・土木　2：日大理工・教員・土木

$$\mathbf{KW} = \mathbf{F} \tag{5}$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^{p+1} N_i^p(x) w_i \tag{6}$$

ここで，Eはヤング率，Iは断面二次モーメント，qは分布荷重，$w(x)$はたわみ，$\widehat{w(x)}$は重み関数，$\mathbf{K}$は B-Spline 基底関数から計算される剛性行列，$\mathbf{W}$はコントロールポイントにおける未知変数ベクトル，$\mathbf{F}$は外力ベクトル，w_iはコントロールポイント変数である．

4.　IGA はり要素の要素性能評価

構築した IGA はり要素で十分な精度が得られることを確認するために，本章で要素性能評価を行う．

4.1.　解析条件・解析ケース

解析モデルと境界条件を figure 1 に示す．等分布荷重が作用する単純ばりを対象として検討を行った．基底関数の次数は 2 次～4 次とし，要素数は 2 次と 3 次は 1～20 要素，4 次は 1 要素のみとした．

4.2.　要素性能評価

方程式を解いて得られた解を式(6)に代入し，たわみの関数を得た．そのような処理をして得られたたわみをはり全体で 100 等分し，理論解との相対誤差を求めた．その結果を figure 2 に示す．基底関数の次数が 2 次の場合要素長の 2 乗に比例して減少，3 次の場合要素長の 4 乗に比例して減少，4 次の場合 1 要素で理論解に一致する結果が得られた．

5.　任意の位置に集中荷重を載荷する方法の検討

構築した IGA はり要素においてスパン中央に集中荷重が作用する単純ばりを解くために，スパン中央に小さな要素を挿入し，挿入した要素に対して等分布荷重を作用させて近似的に集中荷重の作用する問題を解く方法を検討した．

5.1.　解析条件

解析モデルと境界条件を figure 3 に示す．挿入する要素に対して，合力が集中荷重に等しくなる等分布荷重を作用する単純ばりを対象に検討を行った．基底関数の次数は 3 次，要素数は 3 要素とした．また，解析ケースは，挿入する要素の長さ h が全体のはりの長さ L に対して $10/L$，$50/L$，$100/L$，$1000/L$ となる 4 ケースとした．

5.2.　スパン中央におけるたわみの精度検証

得られた解からスパン中央におけるたわみを算出し，理論解と比較した結果を figure 4 に示す．理論解との相対誤差は挿入する要素の長さの 2 乗に比例して単調減少する結果が得られた．

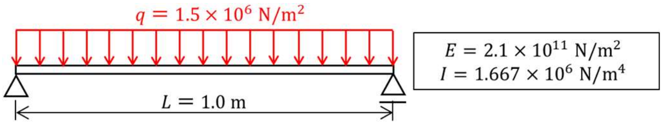

Figure 1.　Computational model and boundary conditions for convergence check

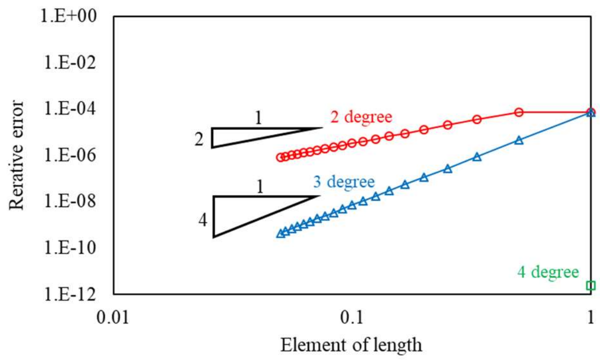

Figure 2.　Convergence rate of the IGA beam elements

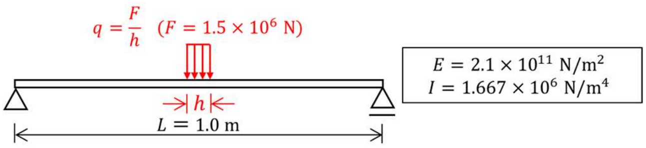

Figure 3.　Computational model and boundary conditions of proposed loading method

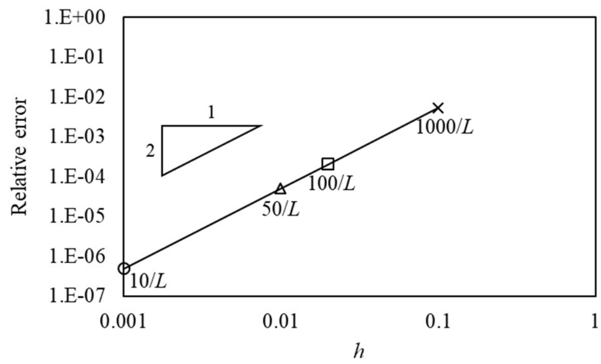

Figure 4.　Comparison of the displacement at the center of span and a theoretical solution

6.　まとめ

IGA に対応したはり要素を構築し，性能評価を行った後に IGA の特性上難しい任意の箇所に集中荷重を載荷する方法を検討した．その結果，小さな要素を挿入し挿入した要素に対して等分布荷重を作用させる方法が，IGA における集中荷重の与え方として有効であることを確認した．

参考文献

[1] J. A. Cottrell，T. J. R. Hughes，Y. Bazilevs : Isogeometric Analysis-Toward Integration of CAD and FEA, Wiley，2009