

階段状水路における nonaerated skimming flow の水深と乱流境界層厚に対する水路傾斜角度の影響

Effects of Channel Angles on Water Depth and Boundary Layer Thickness of Nonaerated Skimming Flows in Stepped Channels

○廣田直樹¹, 佐藤柳言², 高橋正行²

*Naoki Hirota¹, Ryugen Satoh², Masayuki Takahashi²

Abstract: This study shows effects of channel angles and relative step heights on local skin friction coefficients. An empirical equation for the local skin friction coefficients is proposed. The validity of the analytical method for calculating the water depth and the boundary layer thickness is demonstrated.

1. まえがき

階段状水路は、急傾斜水路上の射流のエネルギーを減勢させる方法として用いられている^{[1],[2]}。階段状水路で形成される流況は、水路傾斜角度 θ と相対ステップ高さ S/d_c (S :ステップ高さ, d_c :限界水深 [$d_c = \sqrt[3]{q^2/g}$], g :重力加速度, q :単位幅流量)によって変化する^[1]。階段状水路上で skimming flow(階段の隅角部で常に渦が形成される流況^[1])が形成された場合、乱流境界層が流下とともに発達し、やがて水面に到達して空気が混入し始める。この断面は inception point(以下 I.P. と略す)と呼ばれている。I.P. より上流側では nonaerated skimming flow となり、I.P. より下流側では aerated skimming flow となる (Fig.1 参照)。階段状水路の水工設計のためには、これらの領域の水深、流速、比エネルギーの大きさを知らることが重要である。

最近、nonaerated skimming flow の水深と乱流境界層厚の解析的計算方法が提案された^[3]。この解析法は限られた条件に対して検証されたが、広範囲な θ と S/d_c に適用するためにはさらなる研究が必要である。

本研究では、embankment dam の洪水吐でみられる水路傾斜角度の nonaerated skimming flow を対象に、 θ と S/d_c の影響を考慮した局所摩擦抵抗係数の実験式を提案した。また、水深と乱流境界層厚の解析法の妥当性を検証した。

2. 解析法

Fig.1 の断面①③間の自由水面に沿う流線に Bernoulli の定理を適用すると、乱流境界層外 ($\delta \leq y \leq d$; y は仮想底面を原点とする垂直方向座標, d は水深, δ は乱流境界層厚) では、エネルギー損失は無視でき^[5],

$$1.5d_c + x \sin \theta = d \cos \theta + U^2/(2g) \quad (1)$$

が示される。ここに、 x は仮想底面に沿った流下方向座標、 U は断面③の乱流境界層外側の流速である。

Nonaerated skimming flow の edge 断面 (Fig.1) における x 方向の時間平均流速 \bar{u} の分布について、乱流境界層内 ($0 \leq y \leq \delta$) と乱流境界層外 ($\delta \leq y \leq d$) はそれぞれ、

$$\bar{u}/U = (y/\delta)^{1/N} \quad \text{for} \quad 0 \leq y \leq \delta, \quad (2)$$

$$\bar{u}/U = 1 \quad \text{for} \quad \delta \leq y \leq d \quad (3)$$

となる。排除厚 δ_1 は、

$$\delta_1 = \int_0^d (1 - \bar{u}/U) dy \quad (4)$$

で定義される。(2)と(3)を(4)に用いると δ_1 は、

$$\delta_1 = \delta/(1+N) \quad (5)$$

となる。 $q = \int_0^d \bar{u} dy = U(d - \delta_1)$ と(5)を(1)に適用し、 N は x によらず一定であるから、両辺を x で微分すると、

$$\frac{dd}{dx} = \frac{\sin \theta \left(\frac{d}{d_c} - \frac{1}{1+N} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - \frac{1}{1+N} \frac{d\delta}{dx}}{\cos \theta \left(\frac{d}{d_c} - \frac{1}{1+N} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - 1} \quad (6)$$

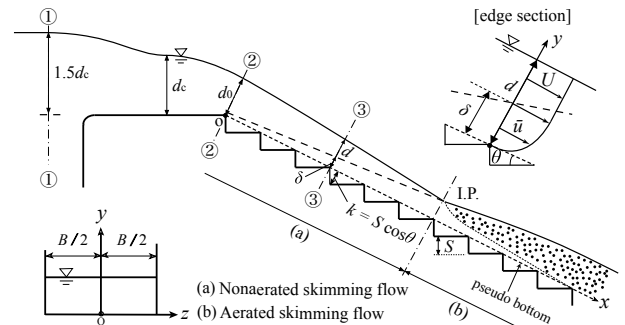


Figure 1. Definition sketch of a stepped channel

が得られる。

非圧縮性流体で二次元定流の場合、境界層近似されたレイノルズ方程式より、

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{2\delta_2 + \delta_1}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (7)$$

が示される^[3]。ここに、 δ_2 は運動量厚、 $C_f [= \bar{\tau}_0/(\rho U^2/2)$, $\bar{\tau}_0$ は仮想底面上での剪断応力, ρ :密度]は局所摩擦抵抗係数である。運動量厚 δ_2 は、

$$\delta_2 = \int_0^d (\bar{u}/U)(1 - \bar{u}/U) dy \quad (8)$$

で定義される。(2)と(3)より、 δ_2 は、

$$\delta_2 = N\delta/\{(N+1)(N+2)\} \quad (9)$$

となる。(7)に(1)、(5)、(9)を代入すると、

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{(N+1)(N+2)}{2N} C_f - \left(1 + \frac{N+2}{2N} \right) \cdot \frac{\delta}{x} \cdot \frac{\sin \theta - \frac{dd}{dx} \cos \theta}{\sin \theta + 1.5 \frac{d_c}{x} - \frac{d}{x} \cos \theta} \quad (10)$$

が得られる。

乱流粗面傾斜水路における流速分布は、

$$\bar{u}/u_* = \Lambda(y/k)^{1/N} \quad (11)$$

で示される^[6]。ここに、 $u_* [= (\bar{\tau}_0/\rho)^{0.5}]$ は摩擦速度、 Λ は係数、 k は粗度高さである。階段状水路の skimming flow の場合、階段による凹凸高さを $k = S \cos \theta$ で表し、(11)に $y = \delta$ で $\bar{u} = U$ であることを用いて C_f を整理すると、

$$C_f = 2\Lambda^{-2} \{ \delta/(S \cos \theta) \}^{-2/N} \quad (12)$$

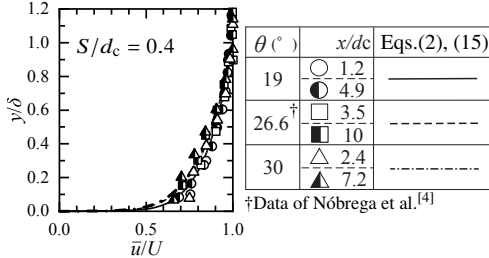
となる。(12)に nonaerated skimming flow での乱流境界層厚の実験式^[7]を用いると、 C_f の支配物理量が明確にされ、

$$C_f = \frac{2}{\Lambda^2} \left(0.135 \frac{1+N}{N} \right)^{-\frac{2}{N}} \left(\frac{x}{S \cos \theta} \right)^{-\frac{1.062}{N}} = a \left(\frac{x}{S \cos \theta} \right)^{-\frac{1.062}{N}} \quad (13)$$

が得られる。ここに、 a は係数である。

Table 1. Examination conditions

θ (°)	S/d_c (-)	S (cm)	q (m ² /s)	B (cm)	Note
19	0.2~0.8	1.5~6.0	0.046~0.099	40.0	A
26.6	0.4	2.5	0.050, 0.060	70.0	N
30	0.4~0.8	1.5~6.0	0.046~0.099	40.0	A

 A : Authors, N : Nóbrega et al.^[4]

Figure 2. Velocity distributions

3. 各研究者による測定

Non-aerated skimming flow における水深 d と時間平均流速 \bar{u} の測定は, **Tab.1** に示される研究者によって行われた. 水深 d と時間平均流速 \bar{u} は, 広頂堰に接続された階段模型を水路幅 B の長方形断面水路に設置し, 水路中央面 ($z=0$, **Fig.1**) の edge 断面を対象に, **Tab.1** の条件のもとで測定された. 著者らの実験では, d はポイントゲージで測定され, \bar{u} は一次元レーザードップラー流速計もしくはピトー管 (管径 3 mm) で測定された. また, Nóbrega et al. による実験では, d はポイントゲージで測定され, \bar{u} はピトー管 (管径 8 mm) で測定された^[4].

乱流境界層厚 δ の間接測定値は, d , \bar{u} の実験値を (4) と (8) に用いて δ_1 と δ_2 をそれぞれ求め, 求められた δ_1 と δ_2 を (5) と (9) より得られる,

$$\delta = (\delta_1/\delta_2 + 1)\delta_1/(\delta_1/\delta_2 - 1) \quad (14)$$

に代入して算出される.

4. 結果

4.1. 流速分布

Edge 断面の相対流速 \bar{u}/U の分布の一例を **Fig.2** に示す. 図中の各線は (2) と擬似等流空気混入水流における N の実験式^[2],

$$N = 14\theta^{-0.65} \frac{S}{d_c} \left(\frac{100 S}{\theta d_c} - 1 \right) - 0.041\theta + 6.27 \quad (\theta \text{ in deg.}) \quad (15)$$

より得られる \bar{u}/U の計算値である. 与えられた θ , S/d_c , x/d_c に対して, 乱流境界層内 ($0 \leq y/\delta \leq 1$) の \bar{u}/U の実験値と計算値は概ね一致している. よって, non-aerated skimming flow の境界層内の \bar{u}/U は (2) と (15) で近似できる.

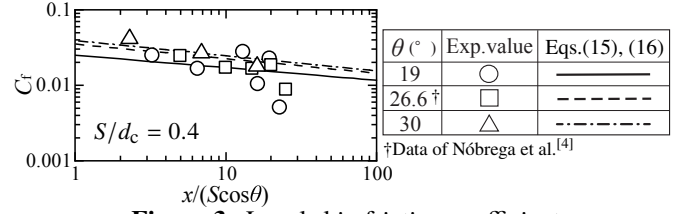
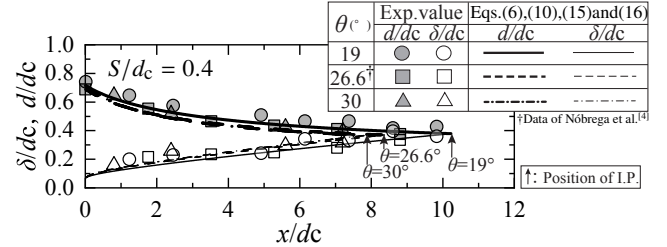
4.2. 局所摩擦抵抗係数

与えられた θ と S/d_c に対して, d と δ の測定値と (15) より算出された N の値を (10) に用いると局所摩擦抵抗係数 C_f の間接測定値が得られる. **Fig.3** に $C_f = f[x/(S \cos \theta), S/d_c, \theta]$ の関係で整理した一例を示す. 与えられた S/d_c に対して, θ の増加とともに C_f は大きくなる. **Tab.1** の θ と S/d_c における C_f の間接測定値より, θ と S/d_c の影響を考慮して, C_f の実験式,

$$C_f = \left\{ \frac{\tanh \theta}{10} - \frac{S}{d_c} \left(0.03\theta^{0.5} \right) \right\} \left(\frac{x}{S \cos \theta} \right)^{-\frac{1.062}{N}} \quad (16)$$

$$\text{for } 19^\circ \leq \theta \leq 30^\circ, 0.2 \leq S/d_c \leq 0.8$$

を提案する. (15) と (16) より得られる C_f の計算値の一例は, **Fig.3** の各線に示される.


Figure 3. Local skin friction coefficients

Figure 4. Water depth and boundary layer thickness

4.3. 水深と乱流境界層厚

水深 d と乱流境界層厚 δ の流下方向変化の一例を **Fig.4** に示す. 与えられた θ と S/d_c に対して, x/d_c の増加とともに d/d_c の値は減少し, δ/d_c の値は増加する.

2. で前述された解析法を用いるためには, 境界条件として断面②の水深 d_0 と乱流境界層厚 δ_0 が必要である. 開水路の段落流れにおける自由越流の堰終端水深 d_b は,

$$d_b/d_c = 0.715 \quad (17)$$

で示される^[8]. 本実験によると, $d_0/d_c = 0.69 \sim 0.74$ であるため, $d_0/d_c \approx d_b/d_c$ と考えて (17) で与えることとする. また, 断面②では $\delta_0/d_0 \approx 0.1$ となることが確かめられている^[9]. よって, (17) と $\delta_0/d_0 = 0.1$ を用いて乱流境界層厚 $\delta_0/d_c (= 0.0715)$ を与えることとする.

与えられた θ と S/d_c に対して, (6), (10), (15), (16) から得られる d/d_c と δ/d_c の計算値を **Fig.4** の各線に示す. 与えられた θ と S/d_c に対して, d/d_c と δ/d_c の実験値と計算値は概ね一致している. また, 与えられた S/d_c に対して, θ の増加に伴い, $d/d_c = \delta/d_c$ となる I.P. までの相対距離 x_i/d_c (x_i : I.P. までの x) は小さくなる.

5. まとめ

水路傾斜角度 $\theta = 19^\circ \sim 30^\circ$ の階段状水路の non-aerated skimming flow において, θ と S/d_c の影響を考慮した C_f の実験式 (16) を示した. また, 与えられた θ と S/d_c に対して, 水深 d/d_c と乱流境界層厚 δ/d_c を求め, I.P. までの相対距離 x_i/d_c を予測することが可能となった.

参考文献

- [1] Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: Flow characteristics of skimming flows in stepped channels, *J. Hydr. Eng.*, 130(9), 860–869, 2004.
- [2] Takahashi, M. and Ohtsu, I.: Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes, *J. Hydr. Res.*, 50(4), 427–434, 2012.
- [3] 佐藤柳言, 高橋正行, 大津岩夫: 階段状水路における non-aerated skimming flow の解析的検討, 土木学会論文集 B1(水工学), 75(2), I_811–I_816, 2019.
- [4] Nóbrega, J.D., Matos, J., Schulz, H.E., and Canelas, R.B.: Smooth and stepped spillway modeling using the SPH method, *J. Hydr. Eng.*, 146(8), 04020054–1–04020054–16, 2020.
- [5] Iwasa, Y.: Boundary layer growth of open channel flows on a smooth bed and its contribution to practical application to channel design, *Memoirs, Faculty of Eng. Kyoto Univ.*, 19(3), 229–254, 1957.
- [6] Castro-Orgaz, O.: Hydraulics of developing chute flow, *J. Hydr. Res.*, 47(2), 185–194, 2009.
- [7] 山元雄生, 高橋正行, 大津岩夫: 階段状水路における non-aerated skimming flow の特性, 土木学会論文集 B1(水工学), 72(4), I_589–I_594, 2016.
- [8] Rouse, H.: Discharge characteristics of the free overfall, *Civil Engineering*, 6(4), 257–260, 1936.
- [9] 高橋正行, 大津岩夫: 階段状水路における non-aerated skimming flow, 土木学会論文集 B1(水工学), 70(4), I_781–I_786, 2014.