O-15

正三角形の古典ハミルトニアン時間結晶
Classical Hamiltonian time crystals in an equilateral triangle

◯ 鈴木研人 [1], 二瓶武史[2]
*Kento Suzuki[1] , Takeshi Nihei[2]

Abstract:In 2012, F. Wilczek proposed a new state of matter called "Time Crystals." It's time-dependent in the minimum energy state. Hamilton's equation shows that time crystals can not exist. But by extending the Poisson bracket, we can confirm the existence of time crystals. We explain the theory of Hamiltonian time crystals and confirm the existence of time crystals using a triangular model as an example.

1　はじめに

時間結晶とは, 2012 年に F.Wilczek らによって提唱された基底状態で運動を続ける物質である [1][2]. 通常の結晶が空間並進対称性を破っているように時間結晶は時間並進対称性を破る. ハミルトン方程式を見れば基底状態では座標も運動量も時間に依存していないことは明らかで, ハミルトン形式での時間結晶は不可能であると考えられてきた [3]. しかし, ポアソン括弧を拡張したもっと一般の力学系で見ればそこに時間結晶が現れることが示された [4].

本研究では古典ハミルトニアン時間結晶について, 一般的な理論と実際に具体的なハミルトニアンに適用した場合の考察を行う.

2　古典ハミルトニアン時間結晶

一般的にエネルギーが保存するハミルトニアンでの時間結晶は不可能であると考えられている [3]. これはハミルトン方程式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \{q,H\} = \frac{\partial H}{\partial p}\\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \{p,H\} = -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned} \tag{1}$$

$(q:$ 一般化座標$, p:$ 一般化運動量$)$

によって明らかで, ハミルトニアン $H(q,p)$ の最小値では (1) 式の右辺は消えてしまうので結果として左辺も消える必要があり, $H(q,p)$ の最小値では (q,p) は時間に依存しない. これにより正準座標系ではハミルトニアン時間結晶は存在しないと結論づけられている.

この結論を回避するためには, 正準座標系以外の座標系を考える必要がある. 局所座標 y^i に依存している関数 $f(y), g(y)$ についての一般のポアソン括弧はテンソル場 $h^{ij}(y)$ によって次のように与えられる [5].

$$\{f,g\} \equiv h^{ij}(y)\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^j} \qquad (i,j=1,\cdots,N) \tag{2}$$

ここで微分二形式

$$\Omega = \Omega_{ab}\ \mathrm{d}\phi^a \wedge \mathrm{d}\phi^b \tag{3}$$

$(\phi^a:$ 多様体上の一般化局所座標$)$

について考える. ヤコビ恒等式

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0 \tag{4}$$

$(f,g,h:$ 任意の関数$)$

より

$$\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{5}$$

が得られ Ω が閉じていることが分かる. またハミルトン方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\phi^a}{\mathrm{d}t} = \{\phi^a, H\} = \Omega^{ab}\partial_b H \tag{6}$$

で与えられる. しかし, ダルブーの定理より (6) 式は座標変換によって (1) 式と一致してしまうため, ここからさらに工夫する必要がある.

工夫の一つとして拘束条件 G_i を導入する. ラグランジュ未定乗数法よりハミルトニアンを次のように拡張する.

$$H \to H_\lambda = H + \lambda^i G_i \tag{7}$$

臨界点 $(\phi^a_{\mathrm{cr}}, \lambda^i_{\mathrm{cr}})$ について

$$\left.\frac{\partial H_\lambda}{\partial \phi^a}\right|_{\phi_{\mathrm{cr}}} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial H_\lambda}{\partial \lambda^i}\right|_{\lambda_{\mathrm{cr}}} = 0 \tag{8}$$

より

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial H}{\partial \phi^a}\right|_{\phi_{\mathrm{cr}}} &= -\lambda^i_{\mathrm{cr}}\left.\frac{\partial G_i}{\partial \phi^a}\right|_{\phi_{\mathrm{cr}}} \quad , \quad H = H(\phi)\\ G_i(\phi_{\mathrm{cr}}) &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad , \quad G = G(\phi)\end{aligned} \tag{9}$$

となる. この式をハミルトン方程式 (6) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi^a}{\mathrm{d}t} &= -\Omega^{ab}\lambda^i_{\mathrm{cr}}\frac{\partial G_i}{\partial \phi^b}\\ \phi^a(0) &= \phi^a_{\mathrm{cr}}\end{aligned} \tag{10}$$

が得られる. $\lambda^i_{\mathrm{cr}} \neq 0$ のとき方程式の解として時間に依存した ϕ^a が得られ, ハミルトニアン時間結晶の存在が確かめられる.

3　拘束条件の例

ハミルトニアン時間結晶が現れる拘束条件の例として, 多角形の閉じた弦を考える. 弦は終点を含む $N+1$ 個の頂点とそこにある点状の相互作用中心をつなぐ線型リンクで構成されているとする. 弦の頂点の座標を $\boldsymbol{X}_i$ $(i=$

[1]日大理工・院（前）・物理
[2]日大理工・教員・物理

$1,\cdots,N+1)$, リンクを $\boldsymbol{n}_i=\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_i$ $(i=1,\cdots,N)$ で表す. リンク $\boldsymbol{n}_i$ は次のポアソン括弧を満たす.

$$\{\boldsymbol{n}_i^a,\boldsymbol{n}_j^b\}=\delta_{ij}\varepsilon^{abc}\boldsymbol{n}_i^c \qquad (a,b,c=1,2,3) \tag{11}$$

これは一般のポアソン括弧 (2) 式の h^{ij} (この場合は h^{ab}) を

$$h^{ab}=\varepsilon^{abc}n^c \tag{12}$$

としたものである. これは正準変数で見るとポアソン括弧を $\{q,p\}=1$ ではなく極座標 (r,ϑ,φ) を用いた $\{\varphi,r\cos\vartheta\}=1$ で採用していることになり, 位相空間としてユークリッド平面ではなく二次元球面を扱っていることになる. また

$$\{n_i^a,\boldsymbol{n}_j\cdot\boldsymbol{n}_j\}=0 \tag{13}$$

よりリンクの長さはハミルトニアンに依らず一定である. 以降簡単のためリンクの長さを $|\boldsymbol{n}_i|=1$ とする. ポアソン括弧を (11) 式としたときのハミルトン方程式は

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}_i}{\partial t}=\{\boldsymbol{n}_i,H(\boldsymbol{n})\}=-\boldsymbol{n}_i\times\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{n}_i} \tag{14}$$

で表される. 拘束条件として弦が閉じている場合

$$\boldsymbol{G}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{n}_i=\boldsymbol{X}_{N+1}-\boldsymbol{X}_1=0 \tag{15}$$

を考える. ラグランジュ未定乗数法より拡張されたハミルトニアンは

$$H_\lambda=H(\boldsymbol{n})+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{G} \tag{16}$$

となる. 臨界点 $(\boldsymbol{n}_{i,\mathrm{cr}},\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{cr}})$ によって得られる条件式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{n}_i}{\partial t}&=-\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{cr}}\times\boldsymbol{n}_i\\ \boldsymbol{n}_i(t=0)&=\boldsymbol{n}_{i,\mathrm{cr}}\end{aligned} \tag{17}$$

が得られる. また

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{cr}}=-\left.\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{n}_i}\right|_{\boldsymbol{n}_{\mathrm{cr}}} \tag{18}$$

より (17) 式が消えなければハミルトニアン時間結晶は存在することになる.

4　具体的なハミルトニアンでの時間結晶

例としてハミルトニアンが

$$H=-\sum_{i=1}^{N}a_i\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{n}_{i+1} \qquad (a_i:\text{定数}) \tag{19}$$

の場合を考える. 簡単のため $N=3$ とすると, 考えているモデルは頂点が 3 つの正三角形となる.

ラグランジュ未定乗数法

$$\begin{aligned}H_\lambda&=H+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{G}\\ &=-\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{n}_{i+1}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{G}&=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_3=0\quad,\quad\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{n}_1\end{aligned} \tag{20}$$

より得られる運動方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_1}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{n}_1\times(a_1\boldsymbol{n}_2+a_3\boldsymbol{n}_3)\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{n}_2\times(a_2\boldsymbol{n}_3+a_1\boldsymbol{n}_1)\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_3}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{n}_3\times(a_3\boldsymbol{n}_1+a_2\boldsymbol{n}_2)\end{aligned} \tag{21}$$

ここで三角形の初期位置について $\boldsymbol{n}_1$ を x 軸とした xy 平面上にとると, $\boldsymbol{n}$ の値が具体的に決まる.

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{n}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{n}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix} \tag{22}$$

(20) 式に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_1}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{3}}{2}(a_1-a_3)\ \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{3}}{2}(a_2-a_1)\ \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_3}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{3}}{2}(a_3-a_2)\ \boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{23}$$

が得られる.($\boldsymbol{e}$: 単位ベクトル) これより $a_1=a_2=a_3$ ではないとき (22) 式すべてが消えることはないのでエネルギーが最低の状態で運動している, すなわち時間結晶になっていることが確かめられる.

5　まとめと今後の展望

本研究では, 古典ハミルトニアン時間結晶の一般的な導出から具体的なハミルトニアンと拘束条件を用いて実際の運動の様子を確認した. 今後は頂点の数を増やした場合について検討する予定である. N が 4 以上になるとリンクの大きさを固定した場合でも考えられる図形が複数ありその違いによる幾何学的な作用や隣接していない頂点からの相互作用などを考慮する必要があると予想される.

参考文献

[1] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **109**, 160401 (2012).

[2] A. Shapere, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **109**, 160402 (2012).

[3] H. Watanabe, M. Oshikawa, Phys. Rev. Lett. **114**, 251603 (2014).

[4] J. Dai, A.J. Niemi, X. Peng, New J. Phys. **22**, 085006 (2020).

[5] S.P. Novikov, Russian Math. Surv. 37 1-6 (1982).