O-18

# 場の量子論を用いたニュートリノ振動
## ── ニュートリノの生成から検出過程 ──
# Neutrino Oscillation in Quantum Field Theory: Production and Detection Processes of Neutrino

○岩﨑量太[1], 二瓶武史[2]
Ryota Iwasaki[1], Takeshi Nihei[2]

Abstract: We explain neutrino oscillation using quantum field theory with a model in which neutrinos and particles propagate in the production and detection processes described by wave packets. The approach presented here describes the neutrino produced in the weak interaction as a superposition of massive neutrino components, leading to the detection process and transition probability of this state.

## 1　はじめに

ニュートリノは弱い相互作用をするフェルミオンであり, $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ の 3 種類存在し, それぞれの違いを匂いに例えてフレーバーという．そしてニュートリノ振動とは空間を伝播する過程でフレーバー $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ が変化する現象である．それぞれが存在する確率が生成されてからの時間, あるいは走った距離の関数として振動的に振る舞うことからニュートリノ振動と呼ばれる．

通常ニュートリノ振動の解析を行う際は平面波を用いて行われるが，そこではニュートリノの運動量の不確定さが無い，つまり運動量が一定としており，これは不確定性関係の観点から問題がある [1], [2]．その問題を解決するためにニュートリノ振動を平面波ではなく波束を用いて説明する必要がある [1].

また，ニュートリノは生成と検出の間で自由粒子として伝播するので，波束を利用した場合と同様に場の量子論を使って，生成されたフレーバーニュートリノを関わりのある粒子の重ね合わせで説明できるはずである [3].

ここではニュートリノの生成, 及び検出過程を考慮するために, ニュートリノが弱い相互作用する粒子を波束を用いて記述し, 場の量子論を用いてその過程を説明した文献 [4] について考察する．

## 2　平面波を用いた場合のニュートリノ振動

ここでは真空中のニュートリノ振動について考え，ニュートリノはディラック型とする．3 つニュートリノの運動量を $\vec{p}$ と揃え，それぞれのエネルギーを $E_j$，質量を $m_j$ とすると平面波解 $\nu_j$ は

$$\nu_j = e^{-ipx} = e^{-iE_j t} \cdot e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tag{1}$$

と書ける．またアインシュタインの関係式から $E_j = \sqrt{\vec{p}^2 + m_j^2}$ である．そしてニュートリノは相対論的粒子で質量は運動量より十分に小さいと近所し，平均的なニュートリノのエネルギーを $E(\simeq |\vec{p}|)$ とする．$U$ を MNS 行列とすると弱固有状態における確率振幅は

$$\nu_\alpha = \sum_j U_{\alpha j} \exp\left(-i\frac{m_j^2}{2E}t\right) U_{\beta j}^* \tag{2}$$

となる $(\alpha, \beta = e, \mu, \tau)$．ここでは簡単のために 2 世代間の振動模型について考えると，行列 $U$ の CP 位相は除去され $U$ は混合角 $\theta$ を持った直交行列になるので $\nu_e \to \nu_\mu$ 間の遷移確率 $P(\nu_e \to \nu_\mu)$ は

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 (\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}t) \tag{3}$$

となる $(\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2)$.

## 3　波束を用いた場合のニュートリノ振動

ガウス波束を考慮した質量固有状態の波動関数は

$$\psi_j(x,t) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p}} \exp\left[i(p_j x - E_j t) - \frac{(x - v_j t)^2}{4\sigma_x^2}\right] \tag{4}$$

($p_j$ : 運動量, $E_j = \sqrt{p_j^2 + m_j^2}, v_j = \partial E_j/\partial p_j = p_j/E_j$, $\sigma_x$ : 位置不確定性) となり，2 世代間 $(\nu_e, \nu_\mu)$ の遷移確率は

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \to \nu_\mu} &= \left| \sum_j \langle \nu_\mu | \psi_j | \nu_e \rangle \right|^2 \\ &= \left| U_{\mu j}^* \psi_j(x,t) U_{ej} \right|^2 \end{aligned} \tag{5}$$

[1] 日大理工・院（前)・物理
[2] 日大理工・教員・物理

となる．ここで $\sigma_x\sigma_p = 1/2, \kappa = (p_1^2 - p_2^2)/\Delta m_{21}^2, \bar{p} = (p_1 + p_2)/2$ を用い，相対論的極限 $(p_j \gg m_j)$ をとると

$$P_{\nu_e\to\nu\mu} = 2\sin^2\theta\cos^2\theta\left\{1-\cos\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{2\bar{p}}x\right)\right. \\ \left.\times\exp\left[-\frac{x^2}{8\sigma_x^2}\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{2\bar{p}}\right)^2-(1+\kappa)\frac{(m_{21})^2}{32\sigma_p^2\bar{p}^2}\right]\right\} \quad (6)$$

が導かれる．

また，ニュートリノ振動が観測出来るようになるための条件は

$$\sigma_p \gg \frac{\Delta m_{21}^2}{\bar{p}} \quad (7)$$

$$\frac{x^2}{8\sigma_x^2}\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{2\bar{p}}\right)^2 \quad (8)$$

である．

## 4　場の量子論を用いた場合のニュートリノ振動

ここでのアプローチは場の量子論の散乱演算子

$$\mathcal{S} = T\exp\left(-i\int d^4x\mathcal{H}_I(x)\right) \quad (9)$$

によって決められた相互作用の影響に乗っ取っている．$\mathcal{H}_I(x)$ は相互作用ハミルトニアンで，始状態を $|i\rangle$ とすると終状態 $(\mathcal{S}-1)|i\rangle$ は

$$(\mathcal{S}-1)|i\rangle \approx -i\int d^4x\mathcal{H}_I(x)|i\rangle \quad (10)$$

と与えられる．

ほとんどの実験ではニュートリノは弱い相互作用で生じるので、生成過程を考慮すると

$$P_I \to P_F + \ell_\alpha^+ + \nu_\alpha \quad (11)$$

となる．($P_I$：崩壊粒子, $P_F$：生成粒子) ここで $\ell_\alpha^+$ は生成されたニュートリノ $\nu_\alpha$ のフレーバーを決定する終状態の荷電レプトンである．

ニュートリノの状態を知るためにまず，ニュートリノ以外の粒子を波束状態

$$|\chi\rangle = \int d^3p\psi_\chi(\vec{p};\vec{p}_\chi,\sigma_{p\chi})|\chi(\vec{p},h_\chi)\rangle \quad (12)$$

によって記述する．式 (12) の $\chi$ は ニュートリノ以外の粒子 $P_I, P_F, \ell_\alpha^+$ で，$h_\chi$ はヘリシティーである．$\psi_\chi$ はガウス波束で

$$\psi_\chi(\vec{p};\vec{p}_\chi,\sigma_{p\chi}) = (2\pi\sigma_{p\chi}^2)^{-3/4}\exp\left[\frac{(\vec{p}-\vec{p}_\chi)^2}{4\sigma_{p\chi}^2}\right] \quad (13)$$

である．また，$\vec{p_\chi}, \sigma_{p\chi}$ はそれぞれ，粒子 $\chi$ の波束の平均運動量と運動量不定性である．これらからニュートリノの状態は

$$|\nu_\alpha\rangle \propto (\langle P_F|\langle\ell_\alpha^+|)|\tilde{P_F},\tilde{\ell}_\alpha^+,\tilde{\nu}_\alpha\rangle \\ \propto (\langle P_F|\langle\ell_\alpha^+|)-i\int d^4x\mathcal{H}_I^P(x)|P_I\rangle \quad (14)$$

と記述できる．

## 5　まとめ

平面波を用いた取り扱いでは式 (3) の遷移確率で示されている様にニュートリノ振動が起こるには $\Delta m_{21}^2$ という質量の二乗の差が必要とされる事が分かった．そして $\Delta m_{21}^2 \neq 0$ だと遷移する確率が時間と共に振動することになるので，これがニュートリノ振動と呼ばれる理由である．

波束を用いた取り扱いでは平面波の時とは違って運動量が一定ではなく，不確定さ $\sigma_p$ を持つものとして実際に確認できた．また，2 世代間 ($\nu_e$と$\nu_\mu$) の遷移確率をガウス波束で記述した波動関数によって求める事も確認できた．そして，平面波を使って導出した結果である式 (3) と比べると，式 (6) が式 (7), (8) を満たせば平面波と同じ結果となることが分かる．

場の理論を用いた取り扱いでは，波束を用いて式 (11) の弱い相互作用過程で生成するニュートリノを記述するために，ニュートリノ以外の粒子 $\chi$ を波束状態で記述し，最終的にニュートリノの状態を粒子 $\chi$ の重ね合わせとして説明できることが確認できた．

## 参考文献

[1] C. Giunti, C. W. Kim, U. W. Lee, Phys. Rev. D44, 3635 (1991).

[2] B. Kayser, Phys. Rev. D24 (1981) 110.

[3] C. Giunti and C.W. Kim, Coherence of neutrino oscillations in the wave packet approach, Phys. Rev. D 58 (1998) 017301.

[4] C. Giunti, INFN, Turin and Turin U. JHEP 11 (2002) 017.