O-19

ウィーラー‐ドゥイット方程式とアインシュタイン重力の１ループ量子補正

Wheeler-De Witt Equation and One-Loop Radiative Corrections to Einstein Gravity

○河村優輝[1]，　岩本弘一[2]
Yuki Kawamura, Koichi Iwamoto

Abstract: The quantum effects of gravity are thought to be of great importance at very early stages of the Universe. We briefly review the Wheeler-De Witt (WD) equation, which is a Schrödinger equation for the Universe, and the Vilenkin's tunneling scenario for the creation of the Universe. We then review one-loop renormalization of Einstein's theory of gravity and discuss radiative corrections to WD equation and resulting effects on the tunneling probabilities.

１．導入

宇宙はほぼ一様等方に膨張しているため、時間を過去へ遡ると宇宙の大きさは小さくなり、やがて時空の量子論的な記述が必要な領域に到達する。Vilenkin[1]は、アインシュタインの重力理論の正準量子により得られる Wheeler-De Witt (WD)方程式を用いて、トンネル効果による無からの宇宙創成を提唱し宇宙創成の確率を求めた。また、Hartle & Hawking[2]は経路積分を用いて同様の考察を行い、no boundary condition を提唱した。

Wheeler-De Witt 方程式には、解釈の問題や時間非依存の問題などが指摘されているが、宇宙創成を考察する上でもっとも簡潔な枠組みの一つである。本講演では、一様等方な閉じた宇宙に対する Wheeler-De Witt 方程式について解説し、それに対する量子補正について考察する。

２． Wheeler-De Witt 方程式と宇宙創成の確率

一般相対論で計量が次のように与えられ一様等方な閉じた時空を考える。

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)d\Omega_3{}^2 \quad (1)$$

ここで、$N(t)$は時間座標の任意性を表すラプス関数、$a(t)$は宇宙の半径に相当するスケール因子、$d\Omega_3{}^2 = \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$は３次元単位球面の計量である。一般相対論の作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x(R - 2\Lambda) \quad (2)$$

と与えられる。ここで、Rはスカラー曲率、Λは宇宙定数、Gは万有引力定数である。(1)式の計量の場合、この作用は

$$S = \frac{3\pi}{4G}\int dt\left(Na - \frac{\dot{a}^2 a}{N} - \frac{1}{l^2}Na^3\right) \quad (3)$$

となる。ただし、$l = \sqrt{3/\Lambda}$である。

この作用からラグランジアンLは

$$L = \frac{3\pi}{4G}\left(Na - \frac{\dot{a}^2 a}{N} - \frac{1}{l^2}Na^3\right) \quad (4)$$

となることが分かる。Nに関する変分をとった後、$N = 1$と選ぶと、フリードマン方程式

$$\dot{a}^2 + 1 - \frac{a^2}{l^2} = 0 \quad (5)$$

を得る。aに対応する一般化運動量p_aは

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{2G}\dot{a}a$$

であるから、ハミルトニアンHは

$$\begin{aligned} H &= \dot{a}p_a - L \\ &= -\frac{3\pi a}{4G}\left(\dot{a}^2 + 1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \quad (6) \end{aligned}$$

となる。

この力学系を正準量子化した場合のシュレーディンガー方程式は、形式的な置き換え

$$p_a \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial a}$$

によって得られ

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

$$\hat{H}\psi = \left[-\hbar^2\frac{d^2}{da^2} + \left(\frac{3\pi}{G\Lambda}\right)^2\left(a^2 - \frac{a^4}{l^2}\right)\right]\psi \quad (7)$$

となる。ここで、$\psi(a,t)$は波動関数であり、時刻tにおいてスケール因子がaとなる確率振幅を与えるものと考えられる。

1: 日大理工・院（前）・物理　　2:日大理工・教員・物理

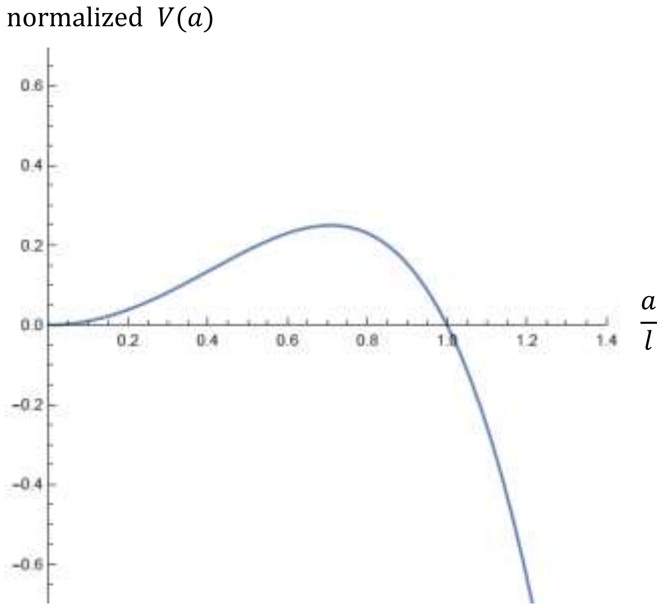

図 1. ポテンシャル$V(a)$の概形 （$\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{G\Lambda}\right)^2$ で規格化）

(5)式と(6)式より、$\hat{H}\psi = 0$というハミルトニアン拘束条件が得られるため、波動関数が時間によらないことが分かる（時間問題）。

Vilenkin[1]は、WD 方程式にもとづき、宇宙が$a = 0$の状態から$a = l$ の状態へトンネル効果で遷移するシナリオを提唱した。(7)式は

$$V(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{G\Lambda}\right)^2\left(a^2 - \frac{a^4}{l^2}\right)$$

と定義されるポテンシャル中での非相対論的な粒子に対するシュレーディンガー方程式と同じ形をしている。$V(a)$の概形は図 1 のようになっており、WKB 近似を用いると、トンネル効果の確率は

$$T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_0^l \sqrt{2V(a)}da\right) = e^{-\frac{3\pi}{G\Lambda}} \qquad (8)$$

と与えられる。

３．アインシュタイン重力の 1 ループ量子補正

アインシュタイン重力は結合定数が質量次元をもつためくりこみ不可能であるが、4 次元では位相不変量を与える恒等式により、1 ループでは偶然的にくりこみ可能となっている。１ループ発散の様子は’t Hooft & Veltman[3]により計算された。Buchbinder & Shapiro[4]による１ループでの有効作用の発散部分の表式は

$$\Gamma^{(1)}_{\text{div}} = -\frac{2}{\epsilon}\int d^dx\sqrt{-g}\left(\frac{53}{90}E_4 + \frac{7}{20}R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{120}R^2 - \frac{19}{30}\partial^\mu\partial_\mu R + \frac{13}{3}\Lambda R + 10\Lambda^2\right) \qquad (9)$$

と与えられる。

ただし、次元正則化における次元をdとして

$$\epsilon = (4\pi)^2(d-4)$$

である。また、E_4は次式で定義されるガウス-ボンネの不変量である。

$$E_4 = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2 \qquad (10)$$

(9)式に現れる項をはじめからラグランジアン密度に含めておくことで､1 ループまでくりこみ可能となる。

４．まとめ

今回は Wheeler-DeWitt 方程式、Vilenkin による無からの宇宙創成のシナリオ、アインシュタイン重力の１ループ量子補正などについて簡単にレビューを行った。今後は、１ループ量子補正の入ったアインシュタイン方程式には高階微分項が含まれており、WD 方程式にも高階微分が含まれることになる。しかし、WKB 近似のもとでは高階微分を無視することが妥当であり、$V(a)$を有効ポテンシャルで置き換えることで、輻射補正を取り入れつつ解析しやすい WD 方程式が導出できると予想される。また、近年注目を集めている漸近的安全な(asymptotic safe)有効場の理論(effective field theory)としてのアインシュタイン重力の定式化[5],[6]を用いると、原理的には 1 ループを超えて、重力の非摂動的なふるまいを取り入れた解析も可能になると期待される。今後は、そのような量子補正を含んだ WD 方程式の導出およびその解析を行う予定である。

５．参考文献

[1] A. Vilenkin, Phys.Rev.D 27, 2848 (1983).
[2] J.B. Hartle and S.W. Hawking, Phy.Rev.D 28, 2960 (1983).
[3] G. ’t Hooft and M. Veltman, Ann. Inst. Henri Poincare ́, Sect. A 20, 69 (1974)
[4] I.L. Buchbinder and I.L. ShapiroI, *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity* (Oxford University Press, New York,2021)
[5] M. Reuter, Phy.Rev.D 57,971(1998)
[6] A. Codello, R. Percacci, L. Rachwal, A. Tonero, European Physical Journal C 76:226 (2016)