O-21

株価変動の多重フラクタル解析
Multi-fractal analysis of stock prices

○石橋侑弥[1]，　山中雅則[2]
*Yuya Ishibashi[1], Masanori Yamanaka[2]

Abstract: The stock market is a place where market participants interact through stock prices to form stock prices. This market can be regarded as a large-scale many-body system in statistical physics, so it is the subject of analysis. We get the fractal dimension, specificity index α and multi-fractal spectrum f(α) by performing multi-fractal analysis on individual stocks. Fractalness can be characterized by the shape of the multi-fractal spectrum f(α). We think it will be useful for predicting how stock prices will fluctuate in the future.

1.　はじめに[1],[2],[3]

自然界には時間的または空間的なスケールを変えても，似たように振る舞う現象が数多く知られているこの性質を（自己相似性）フラクタルという．株価などの金融商品の価格変動は時間的なスケールを変えても似たように振る舞うことが知られている．株価変動の自己相似性についても多くの先行研究が存在する．先行研究における株価変動のフラクタル解析は，時間間隔が日足までしか報告されていない．本研究の目的は，東証アローヘッドの 100 マイクロ秒の超高速取引のティックデータを用いて，これまでに報告されているフラクタル性が 100 マイクロ秒～日足の 24x60x60x1000 ～約 8 桁のスケールに渡り保持されているのか，新規の振る舞いが潜んでいるのかを解析する．そのために，マルチフラクタル解析を行う．

2.　フラクタル[1],[5]

フラクタルを考える上で重要になるのが，フラクタル次元である．ここでは，対象となるフラクタル性を持つ図形を分割し，各セルを長さ ε の立方体と定義する．各セル i に図形を構成する点が存在する確率を pi(ε)と定める．

$$D_q = \frac{1}{q-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}[p_i(\varepsilon)]^q}{\log\varepsilon} \qquad (1)$$

式(1)において，フラクタル次元がパラメータ q の値に依存しないものをフラクタルといい，厳密な自己相似性を満たす．パラメータ q の値によって，フラクタル次元が変わるものは，マルチフラクタルという．マルチフラクタルの性質は，金融商品や自然現象などに現れる．

3.　マルチフラクタル[1],[4],[5]

式(1)で点が存在する確率の比較的大きなセル i は，q>1 において，その確率が式(1)の和の中で相対的に大きくなる事がわかる．q<=1 において，点の存在確率の小さいところは，式(1)の和の中で相対的に大きくなる．パラメータ q を用いることで，対象図形の点の存在確率が大きいところと小さいところをそれぞれ強調したフラクタル次元が求まる．

マルチフラクタル次元を考えるために，式(1)において，次の分配関数 Zq(ε)を用いる．

$$Z_q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}[p_i(\varepsilon)]^q \qquad (2)$$

長さ ε を持つセル i の中にフラクタル図形を構成する点を含む確率は ε の関数として，セルサイズの減少とともに減少する．

$$p_i(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\alpha_i} \qquad (3)$$

この α は特異性指数という．特異性指数は，減少の速さを表し，セルごとに異なる密度を持って分布する(α >0)． α の確率密度関数 g(α)は

$$g(\alpha) = \rho(\alpha)\varepsilon^{-f(\alpha)} \qquad (4)$$

で与えられる．g(α)は，ρ (α)をセルサイズに依存しない部分， ε ^-f(α)をセルサイズに依存する部分とおける．f(α)はマルチフラクタル・スペクトルまたは，大域スペクトルという．式(1)を変形する．

$$(q-1)D_q = -f\big(\alpha(q)\big) + q\alpha(q) \qquad (5)$$

分配関数 Zq の中の和は，ある α の値によって支配されている．式(5)は，その α を α (q)として用いた．

$$\tau(q) = (q-1)D_q \qquad (6)$$

と定義すると，

$$\tau(q) = -f\big(\alpha(q)\big) + q\alpha(q) \qquad (7)$$

となる．この τ (q)はスケーリング指数という．これらを用いることで解析を行える．

4.　ウェーブレット変換[4]

解析は，株価変動のデータそのままでは扱えない．そのため，ウェーブレット変換を行う必要がある．フーリエ解析は与えられた信号を様々な正弦波，余弦波の重ね合わせで表現するが，時間発展を表せないという欠点を持つ．この欠点を改良したのがウェーブレッ

１：日大理工・院(前)・物理　２：日大理工・教員・物理

ト変換である．信号を時間的に局在化されたウェーブレットの重ね合わせで表現することができる．
解析対象の信号を f(t)として，ウェーブレット変換 $W_\phi f$ は

$$W_\psi f[u,s] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\psi^*_{u,s}(t)dt \tag{8}$$

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \tag{9}$$

で与えられる．ここで，ϕ はウェーブレットという．$\phi_{u,s}$(t)は ϕ(t)を位置パラメータ u だけ平行移動し，スケールパラメータ s で時間変数を 1/s し，空間的には 1/√s した関数である．ウェーブレットは，階差を取ることにより信号の大きさを取り出す働きがある．ウェーブレットにはいくつか種類がある．本研究では，ガウス関数の 2 階微分で表されるメキシカンハット・ウェーブレットを用いる．

$$\psi(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = (t^2-1)e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{10}$$

5.　解析手順[4]

（ｉ）最初の手順は，株価変動のデータに適切にフラクタル解析をするためのデータ処理である．株価は市場の開始前に行われる寄り付きという注文の一括処理と，ザラバという注文の逐次処理から成る．そのため，当日の始値と前日の終値の間には，ギャップが生じる．以下の式(8)は，分析対象と成る期間全体にデータ処理を行った対数株価変動である．分析対象期間の株価データ S(t)をサンプリング幅 δt，期間中の市場の営業日数を D 日，それぞれのサンプル数を nz，データの最初から k 番目の営業日における i 番目の株価データを $\hat{S}$[k,j](k=1,…,D，i=1,…,nz)，時間帯 i における観測期間全体での価格変動の標本分散を v[i]とする．

$$Z[n] = \sum_{l=1}^{k-1}\{\sum_{m=1}^{n_z}\frac{\log\frac{\hat{S}[l,m]}{\hat{S}[l]} - \log\frac{\hat{S}[l,m-1]}{\hat{S}[l]}}{v[m]}\} + \sum_{l=1}^{i}\{\frac{\log\frac{\hat{S}[k,l]}{\hat{S}[k]} - \log\frac{\hat{S}[k,l-1]}{\hat{S}[k]}}{v[l]}\} \tag{11}$$

ここで，n は

$$n = (k-1)n_z + i \tag{12}$$

である．

（ii）Z[n]のウェーブレット変換 W_ϕZ[u,s]を求める．

（iii）s∈[0,1]でウェーブレット変換係数極大点(以下 WTMM)を求める．

（iv）スケール s を端点とする WTMM ライン(以下 WTMML)の集合 L(s)を求める．

（ｖ）分配関数 Z(q,s)(q∈R)を求める．

$$Z(q,s) = \sum_{l\in L(s)}\left(sup_{(u,s')\in l, s'\le s}\frac{1}{\sqrt{s'}}\left|W_\psi f[u,s']\right|\right)^q \tag{13}$$

（vi）（ｖ）で求めた Z(q,s)からスケーリング指数 τ(q)とマルチフラクタル・スペクトル fL(α)を求める．

（vii）ルジャンドル変換より，τ(q)からフラクタル次元を求める．

6.　参考文献

[1] Thomas C. Halsey, Mogens H. Jensen, Leo P. Kadanoff, Itamar Procaccia, and Boris I. Shraimant : “Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets”, PHYSICAL REVIEW A, VOLUME33, NUMBER 2, pp1141-1151, 1986 FEBURUARY.

[2] 甲元真人：「マルチフラクタルの統計力学的定式化(ランダムなフラクタル・パターンの成長機構と統計，研究会報告)」，物性研究会報告，54 巻，1 号，pp44-50

[3] 増川純一・水野貴之・村井浄信・尹熙元，「株価の経済物理学」，培風館，2011

[4] 黒田耕嗣，増川純一，村井浄信：「株式市場のマルチフラクタル解析」，日本評論社，2021

[5]井上純一(北海道大学)，「2011 年度 カオス・フラクタル講義ノート」，https://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/46977