O-22

厳密摂動論によるランダム横磁場 Edwards-Anderson 模型の解析

Convergent expansions for the transverse field Edwards-Anderson model

○島尻裕巳[1]，，　坂元啓紀[2]，　糸井千岳[2]

*Hiromi Shimajiri[1], Yoshinori Sakamoto[2], Chigak Itoi[2]

Abstract :　All energy eigenstates in the transverse field Edwards-Anderson model is studied in a convergent perturbative expansion for weak transverse fields or weak exchange interactions in a *d*-dimensional finite cubic lattice. No degeneracy of energy eigenstates in the Edwards-Anderson model is shown by the Kirkwood-Thomas expansion developed by Data-Kennedy, if a perturbation is sufficiently weak. This convergent expansion method shows also that the uniqueness of the ground state in the free spin model under site dependent transverse fields is preserved against a perturbation by sufficiently weak bond-dependent exchange interactions.

１．はじめに

ランダムな交換相互作用を持つ Ising 模型は Edwards-Anderson 模型と呼ばれよく調べられている[3]．この Edwards-Anderson 模型に横磁場を印加した模型は横磁場 Edwards-Anderson 模型と呼ばれ，単純で興味深い量子スピン模型である．理論的に提案された量子アニーリングという一種の量子計算機 [4,6]を，この模型に基づき量子アニーラーが実際に製造されて以来[5],情報,数学,物理学の多くの研究者がこの模型を広く研究してきている.本講演では，横磁場 Edwards-Anderson 模型を弱い量子的な摂動相互作用を持つ古典的なスピン系として厳密な摂動論で取り扱うことによって，エネルギー固有値状態の性質を明らかにする.

２．方法

各格子点に依存した横磁場を印加した独立スピン模型にボンドに依存した交換相互作用を摂動として加えた量子スピン系を考える．一辺の長さが L の d 次元立方格子，上のハミルトニアン演算子を，　各格子点の Pauli 演算子および最近接相互作用と横磁場の関数として次で定義する.

$$H_L = -\sum_{b\in B_{\Lambda_L}} J_b \sigma_b^z - \sum_{i\in\Lambda_L} h_i \sigma_i^x$$

ハミルトニアンは大域的なx軸周りの離散的な回転$\sigma_i^z \to -\sigma_i^z$に対して不変である. 交換相互作用がない場合には, この独立なスピン模型となり, その基底状態は, スピンが横磁場に揃った状態として一意的に定まる.　この講演では, この結果に基づき, 弱い交換相互作用を摂動として加えたランダム横磁場 EA 模型を Datta-Kennedy[1,2]によって改良された厳密な摂動展開として知られる Kirkwood-Thomas 展開[7]を用いて取り扱い, 次の定理を示す.

定理 1.

d次元立方格子上で定義されるハミルトニアンの固有状態は, 摂動のランダム交換相互作用 $sup_{b\in\Lambda_L}\sum_{b\in\partial\{j\}}|J_b|$が十分小さいならば，ほとんど全てのランダム横磁場に対して一意的に定まり，この摂動によってエネルギー固有値の大小関係が変わることはない.

定理２.

d次元立方格子上で定義されるハミルトニアンの固有状態は, 摂動の横磁場が十分弱いならば，ほとんど全てのランダム交換相互作用に対して一意的に定まり，この摂動によってエネルギー固有値の大小関係が変わることはない.

１：日本理工・院（前）・物理　２：日大理工・教員・物理

この定理の証明は，σ_i^zの固有値の任意の配位$\sigma = (\sigma_i)_{i\in\Lambda_L}$，横磁場が負となる部分格子$D = \{i \in \Lambda_L' | h_i < 0\}$と任意の部分格子$X(\subset \Lambda_L)$に対し$\sigma_X = \prod_{i\in X}\sigma_i$および実関数$g(X)$によって基底状態を$\sum_\sigma \sigma_D \exp\left[\sum_{X\subset\Lambda_L} g(X)\,\sigma_X\right]|\sigma\rangle$と表すとき，縮小写像の不動点定理を用いて，摂動展開が与える関数ｇの一意的な存在を示す．そして定理2は摂動を加えた場合のエネルギー固有値と無摂動の場合のエネルギー固有値の差が十分小さい値であること（大小関係）を表すことによって証明を行う．そのために任意の摂動を加えた励起状態に対して基底状態からのずれを修正するために$\phi(\sigma) = \sum_{X\subset\Lambda_L'} f(X)\sigma_X$　$\left(f(X)\text{は実数値関数}\right)$をかける，そして,比較するために励起状態，基底状態それぞれの固有方程式をたて，それらの差をとり，Kirkwood-Thomas 方程式を導出する．そして，そのときに導出される摂動を加えた時の基底状態と摂動を加えた時の任意の励起状態に対するエネルギーギャップと無摂動の時のエネルギーギャップの差から不動点方程式を立てる．そして，定理 1 と同様に不動点定理から不等式を用いることによって，$\phi(\sigma)$の一意性を示すことが出来る．そして，下の不等式を導出することができる．したがって任意の励起エネルギーと基底エネルギーはお互いに交わることはないという事が言える．

$$E_1 - E_0 - \Delta_M \le \delta$$

δは正の微小量，E_1は任意の励起エネルギー，E_0は基底エネルギーを示している。上記の不等式がいえると基底エネルギーは任意の励起エネルギーと交わることがないため,定理２が証明できる

３．まとめ

$sup_{b\in\Lambda_L}\sum_{b\in\partial\{j\}}|J_b|$が十分小さいならば十分小さい交換相互作用を摂動として加えたランダム横磁場 Edwards-Anderson 模型の基底状態は一意的に定まる．

４．参考文献

[1] Datta,N.,Kennedy,T.,：Expansions for one quasiparticle states in spin 1/2 systems J.Stat.，Phys，108，373-399，2002，

[2] Datta,N.,Kennedy,T.,：Instability of interfaces in the antiferromagnetic XXZ chain at zero temperature Commun.，Math. Phys.，236，477-511，2003，

[3] Edwards,S.F.,Anderson,P.W : Theory of spin glasses J,Phys.F:Metal Phys , 236, 965-974, 1975.

[4] Finnila, A., Gomez, M., Sebenik, C., Stenson, C., Doll, J.: Quantum annealing: a new method for minimizing multidimensional functions. , Chemical physics letters, 219, 343-348,　1994.

[5] Johnson,M.W.,Amin,M.H.S.,Gildert,S.,Lanting,T.,Hamze,F.,Dickson,N.,Harris,R.,Berkley,A.J.,Johansson,J.,Bunyk,P.,Chapple,E.M.,Enderud,C.,Hilton,J.P.,Karimi,K.,Ladizinsky,E.,Ladizinsky,N., Oh,T.,Perminov,I.,Rich,C.,Thom,M,C.,Tolkacheva,E.,Truncik,C.J.S.,Uchaikin,S.,Wang,J.,Wilson,B.,Rose,G. : Quabtum annealing with manufactured spins, Nature, 473, 194-198, 2011.

[6] Kadowaki,T.,Nishimori,H.,: Quantum annealing in the transverse Ising model, Phys.Rev.E, 58, 5355-5363, 1998.

[7] Kirkwood,J.R.,Thomas,L.E.,: Expansions and Phase Transitions for the Ground State of Quantum Ising Lattice Systems, Commun.Math.Phys , 88, 569-580, 1983.