O-23

厳密摂動論によるランダムボンドHeisenberg模型の解析

Convergent expansion for the random bond Heisenberg model

○堀江宏太 [1] ，糸井千岳 [2] ，坂元啓紀 [3]

*Kota Horie[1] , Chigak Itoi[2] , Yoshinori Sakamoto[3]

Abstract: Energy eigenstates in the random bond quantum Heisenberg XYZ model in a *d*-dimensional finite cubic lattice are obtained for sufficiently weak XY exchange interactions. The Kirkwood-Thomas convergent expansion developed by Datta and Kennedy using the contraction mapping theorem for quantum spin states enables us to obtain energy eigenstates in the Edwards-Anderson model perturbed by sufficiently weak bond-dependent XY exchange interactions. We study energy spectrum and provide a sufficient condition on the perturbation for absence of level crossing between arbitrary energy eigenstates.

1.　導入

十分に弱い XY 交換相互作用を持つランダムボンド Heisenberg 模型に厳密摂動論を適用して解析する.

一辺の長さ L の d 次元超立方格子 $\Lambda_L = Z^d \cap (-L/2, L/2]^d$ 上のハミルトニアン演算子を Pauli 演算子 $\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z$ と結合定数（$\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{J}$）の関数として次のように定義する.

$$H_\Lambda(\sigma, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{J}) = -\sum_{b \in B_\Lambda} \left(J_b \sigma_b^z + \epsilon_b^x \sigma_b^x + \epsilon_b^y \sigma_b^y \right). \qquad (1)$$

ここで, 最近接ボンドの集合 B_Λ は

$B_\Lambda = \{\{i,j\} | i,j \in \Lambda_L, |i-j| = 1\}$ である. また, b を任意のボンドとして, ボンドスピン $\sigma_b^a = \sigma_i^a \sigma_j^a$ と定義する. スピン配位 $\sigma \in \Sigma_\Lambda \coloneqq \{1, -1\}^{\Lambda_L}$ の状態 $|\sigma\rangle$ を次のように定義する.

$$\sigma_i^z |\sigma\rangle = \sigma_i |\sigma\rangle.$$

$\mathbb{Z}_2$ 対称性による, 自明な二重縮退を取り除くため,

$$\sigma_{i_0} = 1 \qquad (2)$$

を仮定する. 部分格子 Λ_L' を Λ_L から i_0 を除いた集合と定義する.

2.　無摂動系

補題 1. 条件(2)のもとで d 次元超立方格子 Λ_L 上のハミルトニアン(1)が無摂動 $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{0}$ の場合を考える. ほとんどすべての $\boldsymbol{J} = \mathbb{R}^{B_\Lambda}$ について任意の異なるスピン配位 $\sigma, \sigma' \in \{1, -1\}^{\Lambda_L'}$ で

$$H_\Lambda(\sigma, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{0}) \neq H_\Lambda(\sigma', \boldsymbol{J}, \boldsymbol{0}), \qquad (3)$$

が成り立つ.

補題 1 より無摂動の場合ほとんどすべての $\boldsymbol{J} = \mathbb{R}^{B_\Lambda}$ について縮退がないことがわかる.

3.　展開法

ハミルトニアンを次のようにユニタリー変換する. $\widetilde{H}_\Lambda = U^\dagger H_\Lambda U$

$$= -\sum_{b \in B_\Lambda} \left(J_b \sigma_b^x + \epsilon_b^x \sigma_b^z + \epsilon_b^y \sigma_b^y \right) \qquad (4)$$

ここで、$U\sigma_i^z U^\dagger = -\sigma_i^x$, $U\sigma_i^x U^\dagger = \sigma_i^z$.

任意の部分集合 $D \in S_\Lambda$ について状態 $|\pm\rangle$ を実関数 $g(X)$ により次のように表す.

$$|\pm\rangle = 2^{-(|\Lambda_L|+1)/2} \sum_\sigma \sigma_D \left(1 \pm \sigma_{\Lambda_L}\right) \psi_\pm(\sigma) \, |\sigma\rangle$$

$$\psi_\pm(\sigma) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sigma_{\Lambda_L}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{X \in S_\Lambda} g(X) \sigma_X \right]$$

ここで, S_Λ を 2^{Λ_L} から空集合を除いたものと定義する. また, $\sigma_X \coloneqq \prod_{i \in X} \sigma_i$ である. 無摂動模型における $\mathbb{Z}_2$ 対称性による二重縮退が摂動によって分裂するので, ス

1:日大理工・院（前）・物理　2:日大理工・教員・物理　3:日大理工・教員・一般

ピン反転演算子$P_Z = \sigma^z_{\Lambda_L}$を定義すると, $P_Z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$より$|\pm\rangle$は$P_Z$の固有状態になっている. 固有値方程式

$$\widetilde{H}_\Lambda(\sigma, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{J})|\pm\rangle = E_\pm|\pm\rangle,$$

から$E_\pm$と$g(X)$についての関係式が得られる.

$g(X)$の関係式から$F(g) = g$という不動点方程式を定義する．XY 相互作用の結合定数が十分に弱い十分に弱いとき，$F(g)$が収縮写像であることを証明することができる．よって, 収縮写像の定理より$F(g) = g$は一意な解をもつことを示せる.

定理 1.ハミルトニアン(6)で定義されるランダムボンド Heisenberg 模型について考える．任意の部分格子$D \in S_\Lambda$について, XY 相互作用$\boldsymbol{\epsilon}$が十分に弱いならば, エネルギー固有値$E_\pm$をもつ固有状態$|\pm\rangle$が存在し, $P_Z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$を満たす.

また,エネルギーギャップ$|E_+ - E_-|$は次のように指数関数的に小さくなる.

$$|E_+ - E_-| \leq A|\sum_{b\in\partial X} J_b s^D_b\,||g(X)|(\epsilon M)^{|\Lambda_L|}$$

ここで，Aは定数，Mは$M > 0$の定数，ϵを

$\epsilon \coloneqq \sup_{c\in B_\Lambda} \sum_{b\in\partial X} |\epsilon^x_b - \epsilon^y_b s^D_b|$で定義するとき，$\epsilon M < 1$

である.

よってこの定理によれば，有限格子の模型では摂動によりエネルギー固有値の分裂が起こるが，無限に大きな格子では縮退し，$\mathbb{Z}_2$ 対称性の自発的な破れが予想される.

4.　エネルギーギャップについての展開

二つの固有状態$|C\rangle$，$|D\rangle$のエネルギーギャップを評価するために$|\pm\rangle'$を次のように表す.

$$|\pm\rangle' = 2^{-(|\Lambda_L|+1)/2} \sum_\sigma \sigma_D\left(1 \pm \sigma_{\Lambda_L}\right)\psi(\sigma)\,\phi(\sigma)|\sigma\rangle$$

$$\phi_\pm(\sigma) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sigma_{\Lambda_L}\right) \sum_{X\in S_\Lambda} f(x)\sigma_X$$

ここで，エネルギーギャップΔ_Yを次のように定義する.

$$\Delta_Y \coloneqq 2\sum_{b\in\partial Y} J_b s^D_b.$$

ここで任意の$D \in S_{\Lambda_L}$について

$s^D\colon \Lambda_L \to \{1, -1\}$を$i \in D$ならば$s^D = -1$また,

$i \notin D$ならば$s^D = -1$と定義する.また,

$\partial X = \{\{i, j\} \in B_L | i \in X, j \notin X or j \in X, i \notin X\}$と定義する.

次に,

$$e_\pm(C) = E_C - E_D - \Delta_C,$$

$$e_\pm(Z) = \frac{f(Z) \pm f(Z^c)}{F(D) \pm F(D^c)},$$

と定義する．$|\pm\rangle'$，$|\pm\rangle$のエネルギー固有値方程式から$e_\pm(C), e(Z)$についての関係式が得られる.その関係式から不動点方程式$e_\pm(C) = F(e)(C)$と$e_\pm(Z) = F(e)(Z)$が得られ，$F(e)(C)$と$F(e)(Z)$は収縮写像であることが示せる.

定理 2. ハミルトニアン(1)で定義されるランダムボンド Heisenberg 模型について考える. XY 相互作用$\boldsymbol{\epsilon}$が十分に弱いならば,結合定数$(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{J})$に依存する十分に小さい定数$\delta > 0$が存在して，二つの異なる部分格子$C, D \in S_\Lambda$の摂動を加えた模型のエネルギーギャップ$E_D - E_C$に関して次の不等式が成り立つ.

$$H_\Lambda(s^C, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{0}) - H_\Lambda(s^D, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{0}) - \delta$$
$$< E_D - E_C$$
$$< H_\Lambda(s^C, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{0}) - H_\Lambda(s^D, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{0}) + \delta$$

よって，任意の状態$|\pm\rangle$，$|\pm\rangle'$は XY 相互作用が十分に弱いならばエネルギー準位の交差を起こさない.

参考文献

[1] Datta, N., Kennedy, T., Expansions for one quasiparticle states in spin 1/2 systems J. Stat. Phys. 108,373-399(2002)

[2] Datta, N., Kennedy, T., Instability of interfaces in the antiferromagnetic XXZ chain at zero temperature Commun. Math. Phys. 236, 477-511 (2003)

[3] Edwards,S. , F., Anderson, P. W. : Theory of spin glasses J. Phys. F: Metal Phys. 5, 965-974(1975)

[4] Kirkwood, J. R., Thomas, L. E., :Expansions and Phase Transitions for the Ground State of Quantum Ising Lattice Systems, Commun. Math. Phys. 88, 569-580 (1983)