P-11

保型シュワルツ微分方程式の可解性について
On solvability of automorphic Schwarzian equations

○安川 侑里 [1]
*Yuuri Yasukawa[1]

Abstract: We introduce automorphic Schwarzian equations and characterize its solvability via certain Fuchsian equations of second order.

1. Introduction

D を $\mathbb{C}$ の領域とし, h を D 上の有理型関数とする. h のシュワルツ微分を

$$\{h, z\} = \left(\frac{h''}{h'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 = \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 \quad (1)$$

と定義する. 本稿では, 重さ 4 の保型形式 f に付随する保型シュワルツ微分方程式

$$\{h, \tau\} = f$$

の可解性を, 2 階フックス微分方程式

$$y'' + \frac{1}{2}fy = 0$$

の解を用いて特徴付ける.

2. 保型形式と同変関数

Sebber, Saber の [4] の設定を復習しておく. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群 Γ をフックス群と呼ぶ. ポアンカレ上半平面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ とすると, 一次分数変換により Γ は $\mathbb{H}$ に作用する. Γ のカスプ全体の集合を P_Γ と書くとき, $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}^*_\Gamma = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}_\Gamma$ とする. $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ がコンパクトのとき Γ を第 1 種フックス群と呼ぶ ([1, Chapter 1]) .

ρ をフックス群 Γ の有限次元表現 ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対する準同型写像 $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) とする. F を $\mathbb{H}$ 上の $\mathbb{C}^n$ 値有理型関数とし, $k \in \mathbb{Z}$ とする. 関数 F が

$$F(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k \rho(\gamma) F(\tau), \quad \tau \in \mathbb{H},\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を満たすとき, F を重さ k で乗数系 ρ の n 次元ベクトル値**保型形式**という (カスプの条件は課さない).

ρ が 2 次元 ($n = 2$) のとき, $\mathbb{H}$ 上の $\mathbb{C}$ 値有理型関数 h が

$$h(\gamma\tau) = \rho(\gamma) h(\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}, \gamma \in \Gamma$$

を満たすなら, h は ρ **同変関数**であるという. ここで, 両辺の行列の作用は一次分数変換である. 特に, ρ が Γ の指標を引き起こすとき, 即ち $\rho(\Gamma) \subseteq \mathbb{C}^* I_2$ のとき, h はスカラー値保型関数である.

Γ の 2 次元表現 ρ に対し, 乗数系 ρ の 2 次元ベクトル値保型形式と ρ 同変関数の間には密接な関係がある. 実際, $F = \left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right)$ がある重さに対する乗数系 ρ のベクトル値保型形式で $f_2 \neq 0$ なら, $h = \frac{f_1}{f_2}$ は ρ 同変関数であり, 全ての ρ 同変関数がこのようにして得られる ([2, Theorem 4.4]). そして Γ の任意の n 次元表現 ρ に対する零でないベクトル値保型形式が存在する ($n \neq 2$ でも成立) . 結果として任意のフックス群 Γ と Γ の任意の 2 次元表現 ρ に対して, 零でない ρ 同変関数は常に存在する ([3, Theorem 7.2]) .

3. 保型微分方程式

以下, $D = \mathbb{H}$ とし, Γ は第 1 種フックス群, f は Γ に対する重さ 4 のスカラー値保型形式とする. 保型シュワルツ微分方程式

$$\{h, \tau\} = f$$

と 2 階フックス微分方程式

$$y'' + \frac{f}{2} y = 0$$

の関係について考察する.

Proposition 1. シュワルツ微分は以下の性質を持つ. ここで f は一般の領域 D 上の有理型関数であり, w は D 上の有理型関数で $w(D) \subset D$ を満たすとする.

- 射影不変性：$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対し
$$\left\{\frac{af + b}{cf + d}, z\right\} = \{f, z\}.$$
- コサイクルの性質：w が z の関数なら,
$$\{f \circ w, z\} = \{f, w\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \{w, z\}.$$
-
$$\{f, z\} = 0 \iff f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$
- $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ で $w = \frac{az+b}{cz+d}$ なら
$$\{f \circ w, z\} = \{f, w\} \frac{(ad - bc)^2}{(cz + d)^4}. \quad (2)$$

1: 日大理工・院 (前)・数学

- D 上の定数でない 2 つの有理型関数 f, g に対し,
$$\{f,z\}=\{g,z\}$$
$$\Longleftrightarrow f(z)=\frac{ag(z)+b}{cg(z)+d},\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}). \quad (3)$$
- $w(z)$ がある $z_0\in D$ で $w'(z_0)\neq 0$ を満たすなら, z_0 のある近傍上で
$$\{z,w\}=-\{w,z\}\left(\frac{dz}{dw}\right)^2.$$

Proposition 2. ([4, Proposition 3.1]) $h(\tau)$ を $\mathbb{H}$ 上の定数関数でない有理型関数とする. このとき, Γ に対する重さ 4 のあるスカラー値保型形式 f に対して $\{h,\tau\}=f$ が成り立つことと, Γ のある 2 次元表現 ρ に対して h が ρ 同変関数であることは同値である.

Proof. f は Γ に対する重さ 4 の保型形式で, $\{h,\tau\}=f$ とする. (2) を使うと, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma$ に対し,
$$(c\tau+d)^4f(\tau)=f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\left\{h\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right),\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right\}$$
$$=(c\tau+d)^4\left\{h\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right),\tau\right\}.$$
よって $\{h,\tau\}=f(\tau)$ より,
$$\{h,\tau\}=\left\{h\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right),\tau\right\}.$$
従って (3) より,
$$h\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\frac{Ah(\tau)+B}{Ch(\tau)+D}$$
となる $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在する. $\rho\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right):=\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ mod $\mathbb{C}^*I_2$ とおくと, 2 次元表現 $\rho:\Gamma\to\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ が定義できて, h は ρ 同変関数である. 逆に, h が ρ 同変関数なら $f=\{h,\tau\}$ は Γ に対する重さ 4 の保型形式であることが (2) , (3) よりわかる. □

h_1 と h_2 が定数関数でない $\{h,\tau\}=f$ の 2 つの解なら, (3) より, $h_2(\tau)=\sigma h_1(\tau)$ となるような $\sigma\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在する. ρ_1 (resp. ρ_2) を, h_1 が ρ_1 同変関数 (resp. h_2 が ρ_2 同変関数) となるような Γ の 2 次元表現とすると, 上の $\sigma\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して $\rho_2=\sigma\rho_1\sigma^{-1}$ を満たす ([4, Proposition 3.2]). よって表現 ρ_1 と ρ_2 は共役である.

Theorem 3. ([4, Theorem 3.3]) f を Γ に対する重さ 4 の保型形式とし, $\mathbb{H}$ 上で正則とする.

(i) y_1 と y_2 が $y''+\frac{1}{2}fy=0$ の解で一次独立かつ正則なら, $F=\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$ はある乗数系 ρ に対し, 重さ -1 のベクトル値保型形式である. さらに, $h=\frac{y_1}{y_2}$ は $\{h,\tau\}=f$ の解であり, ρ 同変関数である.

(ii) h が $\{h,\tau\}=f$ の解なら, $y_1=\frac{h}{\sqrt{h'}}$ と $y_2=\frac{1}{\sqrt{h'}}$ は $y''+\frac{1}{2}fy=0$ の 2 つの解で, 一次独立かつ正則である.

Proof. まず $\mathbb{H}$ が単連結で f が正則なので, $y''+\frac{1}{2}fy=0$ の一次独立になるような大域解 $\{y_1,y_2\}$ は常に存在する.

(i) y を正則な解とすると, $\gamma=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma$ に対し関数 $y^*(\tau)=(c\tau+d)y(\gamma\tau)$ も正則な解になる. 従って, y_1 と y_2 が一次独立な 2 つの解なら, y_1^* と y_2^* も一次独立な 2 つの解である. よって, $\left(\begin{smallmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{smallmatrix}\right)=\rho(\gamma)\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$, $(\gamma\in\Gamma)$ となる Γ の 2 次元表現 ρ が存在する. つまり, $F=\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$ は重さ -1 で乗数系 ρ のベクトル値保型形式となる. さらに, $h=\frac{y_1}{y_2}$ は $\{h,\tau\}=f$ を満たす ρ 同変関数である.

(ii) h を $\{h,\tau\}=f$ の解とする. (1) より $h'(\tau_0)=0$ なら τ_0 は $\{h,\tau\}$ の 2 位の極である. しかし f は正則なので矛盾が生じる. 従って $h'(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上零でないことがいえる. また, h が τ_0 で多重極を持つなら, (1) より $f=\{h,\tau\}$ は τ_0 で 2 位の極を持つので矛盾する. τ_0 が h に対する 1 位の極なら, $\{h,\tau\}$ の正則点になる. 以上のことから, もし h に極があるならそれらは単純極である. 従って, h の全ての極は h' に対する 2 位の極であり, このことから $\mathbb{H}$ 上の有理型関数 G が存在して, $G^2=h'$ が成り立つ. この G を $\sqrt{h'}$ と書くことにすると, h の極は $\frac{1}{\sqrt{h'}}$ の単純零点になる. 従って, $y_1=\frac{h}{\sqrt{h'}}$ と $y_2=\frac{1}{\sqrt{h'}}$ は $\mathbb{H}$ 上で正則であることがわかる. y_1 の 2 次導関数は
$$y_1''=-\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{h'}}\{h,\tau\}=-\frac{1}{2}y_1f$$
を満たす. ゆえに y_1 は $y''+\frac{1}{2}fy=0$ の解であり, y_2 に対しても同様のことがいえる. □

4. 参考文献

[1] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.

[2] H. Saber and A. Sebbar, *Equivariant functions and vector-valued modular forms*, Int. J. Number Theory, **10** (2014), no. 4, 949–954.

[3] H. Saber and A. Sebbar, *On the existence of vector-valued automorphic forms*, Kyushu Math. J., **71** (2017), 271–285.

[4] A. Sebbar and H. Saber, *Automorphic Schwarzian equations*, Forum Math., **32** (2020), no. 6, 1621–1636.