P-12

種数２以上の曲線における有理点の有限性
The finiteness of rational points on curves of genus at least 2

○宮島碧 [1]
Midori Miyajima[1]

Abstract: We outline the proof of Mordell's conjecture, namely finiteness of rational points on curves of genus at least two. We follow Vojta's proof, but we emphasize which parts depend on specific curves and which parts only depend on the genus.

本稿では，定理 4 を主定理とする．定理 4 は，ファルティングスによって証明され，ヴォイタによって別証明が与えられたモーデルの予想を，C に依存する部分と依存しない部分に分けたものである．

1. 有限次元線形空間における円錐とそれに関する命題

K を代数体とし，C を K 上の滑らかな射影代数曲線で種数 $g \geq 2$ とする．本稿では $C(K)$ の有理点について考察する．J を C のヤコビ多様体とすると，J はアーベル多様体となる．Θ を J 上のテータ因子とする．$C(K) \neq \varnothing$ のとき，$C(K)$ の有理点を一つ固定することで埋め込み $C \hookrightarrow J$ を定める．

$x, y \in J(\overline{K})$ とすると，

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left[\hat{h}_\Theta(x+y) - \hat{h}_\Theta(x) - \hat{h}_\Theta(y)\right]$$

が内積となる．ここで，$\hat{h}$ は Θ に対する cannonical height である．また，同じ式で $J(K)\otimes\mathbb{R}$ 上でも内積となる．

内積を定めたことにより，$J(K)\otimes\mathbb{R}$ を有限次元ユークリッド空間と考えることができる．したがって，任意の $z, w \in J(K)\otimes\mathbb{R}$ に対して，角度 $\theta(z,w)$ を定義でき，

$$\cos\theta(z,w) = \frac{\langle z, w\rangle}{\|z\|\,\|w\|},\ 0 \leq \theta(z,w) \leq \pi$$

が成り立つ．

任意の x_0, θ_0 に対して，

$$\Gamma_{x_0,\theta_0} = \{x \in J(K)\otimes\mathbb{R} \big| \theta(x, x_0) < \theta_0\} \tag{1}$$

を，原点と点 x_0 を通る直線を軸とする角度 $2\theta_0$ の内部を持つ円錐とする．

補題 1. V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間とし，$\dim V = N$ とする．各 x_0，θ_0 に対して，Γ_{x_0,θ_0} を (1) の円錐とすると，$n \leq \left(\lfloor\frac{1}{\delta}\rfloor + 1\right)^N \times 2^N$ と $x_1, \ldots, x_n \in V$ が存在し，

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_{x_i,\theta_0}.$$

ただし，δ は $1 - \frac{N}{\sqrt{N}}\delta > \cos\theta_0$ を満たす実数．

証明. $e_1, \ldots, e_N$ を V の正規直交基底とし，$S = \{v \in V \big| \|v\| = 1\}$ を考える．$[0,1]$ を幅 δ の区間に分ける．つまり，

$$\underbrace{[0,\delta],\ [\delta, 2\delta], \ldots, [d_i\delta, (d_i+1)\delta], \ldots, \left[\left\lfloor\frac{1}{\delta}\right\rfloor\delta, 1\right]}_{\lfloor\frac{1}{\delta}\rfloor+1\ \text{個}} \tag{2}$$

$v \in S$ とし，$v = c_1e_1 + \cdots + c_Ne_N$ とする．$v \in S$ なので，$\sum_{i=1}^N c_i^2 = 1$，特に $|c_i| \leq 1$ である．まず，それぞれの c_i が非負，つまり [0,1] に入るとする．各 c_i が (2) の区間のうち，$[d_i\delta, (d_i+1)\delta]$ の区間に入るとすると，$d_i\delta \geq c_i - \delta$ となる．このことと，e_i が正規直交基底であることより，

$$\begin{aligned}\left\langle v,\ \sum_{i=1}^N d_i\delta e_i\right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^N c_ie_i,\ \sum_{i=1}^N d_i\delta e_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N c_id_i\delta \geq \sum_{i=1}^N c_i^2 - \delta\sum_{i=1}^N c_i = 1 - \delta\sum_{i=1}^N c_i.\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^N c_i^2 = 1$ なので，ラグランジュの未定乗数法より，$\sum_{i=1}^N c_i$ は最大でも $\frac{1}{\sqrt{N}} \times N$ である．つまり，

$$\langle v,\ \sum_{i=1}^N d_i\delta e_i\rangle \geq 1 - \frac{N}{\sqrt{N}}\delta.$$

$1 - \frac{N}{\sqrt{N}}\delta > \cos\theta_0$ となるように δ を用意すれば，

$$\cos\theta\left(v,\ \sum_{i=1}^N d_i\delta e_i\right) = \frac{\langle v, \sum_{i=1}^N d_i\delta e_i\rangle}{\|v\|\,\|\sum_{i=1}^N d_i\delta e_i\|}.$$

ここで，$\|\sum_{i=1}^N d_i\delta e_i\| = \sum_{i=1}^N d_i^2\delta^2 \leq \sum_{i=1}^N c_i^2 = 1.$
よって，

$$\begin{aligned}\cos\theta\left(v,\ \sum_{i=1}^N d_i\delta e_i\right) &\geq \left\langle v,\ \sum_{i=1}^N d_i\delta e_i\right\rangle \\ &\geq 1 - \frac{N}{\sqrt{N}}\delta > \cos\theta_0\end{aligned}$$

となるので，$v \in \Gamma_{\sum_{i=1}^N d_i\delta e_i, \theta_0}$ である．したがって，$\left\{\sum_{i=1}^N d_i\delta e_i \big| 0 \leq d_i \leq \lfloor\frac{1}{\delta}\rfloor,\ \delta \in \mathbb{Z}\right\}$ を用意すればよい．

1: 日大理工・院 (前)・数学

この点の個数は多く見積もっても $\left(\left\lfloor\frac{1}{\delta}\right\rfloor+1\right)^N$ 個以下である．c_i の符号が違う場合も対称性より同じで，符号の可能性は 2^N 個なので，円錐の個数は $\left(\left\lfloor\frac{1}{\delta}\right\rfloor+1\right)^N \times 2^N$ 個以下で V を覆える． □

補題 2. V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間とし，$S=\{v\in V \big| \|v\|=1\}$ とする．このとき，$\theta(s,s')$ は S 上で三角不等式

$$\theta(s,s') \leq \theta(s,s'') + \theta(s'',s')$$

を満たす．

証明. $\langle s,s'\rangle = \cos\theta_1$, $\langle s,s''\rangle = \cos\theta_2$, $\langle s',s''\rangle = \cos\theta_3$ ($\theta_1,\theta_2,\theta_3 \in [0,\pi]$) とする．$\theta_2+\theta_3 \geq \pi$ であれば，自明．$\theta_2+\theta_3 < \pi$ とする．$\mathbb{R}$ 上の２次形式

$$Q(x_1,x_2,x_3) = \langle x_1 s + x_2 s' + x_3 s'', x_1 s + x_2 s' + x_3 s''\rangle$$

を考える．Q に対応する対称行列は，

$$A_Q = \begin{pmatrix} \langle s,s\rangle & \langle s,s'\rangle & \langle s,s''\rangle \\ \langle s',s\rangle & \langle s',s'\rangle & \langle s',s''\rangle \\ \langle s'',s\rangle & \langle s'',s'\rangle & \langle s'',s''\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 & 1 & \cos\theta_3 \\ \cos\theta_2 & \cos\theta_3 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．任意の $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して，$Q(x_1,x_2,x_3) \geq 0$ であるので，A_Q の固有値はすべて非負である．特に，$\det(A_Q) \geq 0$ である．一方，

$$\begin{aligned} &\det(A_Q) \\ &= 1 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_3 \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned} &(\sin\theta_2\sin\theta_3)^2 - (\cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos\theta_1)^2 \\ &= (1-\cos^2\theta_2)(1-\cos^2\theta_3) - (\cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos\theta_1)^2 \\ &= \det(A_Q) \geq 0 \end{aligned}$$

を得る．したがって，$\sin\theta_2\sin\theta_3 \geq 0$ であるので，

$$\sin\theta_2\sin\theta_3 \geq |\cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos\theta_1| \geq \cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos\theta_1$$

すなわち，$\cos\theta_1 \geq \cos(\theta_2+\theta_3)$ となる．$\theta_2+\theta_3 < \pi$ なので，主張が従う． □

2. $C(K)$ の有理点の有限性

モーデルの予想のヴォイタによる証明で，一番鍵となるのが次の不等式である．

定理 3 (ヴォイタの不等式)**.**

計算可能な定数 $\kappa_1 = \kappa_1(C)$，$\kappa_2 = \kappa_2(g)$ が存在して，$z,w \in C(\overline{K})$ が，$\|z\| > \kappa_1$，$\|w\| > \kappa_2\|z\|$ を満たすならば，

$$\langle z,w\rangle \leq \frac{3}{4}\|z\|\|w\|$$

が成り立つ．

定理 4 (ファルティングス，ヴォイタ)**.**

κ_1，κ_2 を定理 *3* のものとし，補題 *1* を $J(K)\otimes\mathbb{R}$, $\theta_0 = \frac{\pi}{12}$ で使って得られるものを $x_1 \dots x_n$ とする．

- $A_{\mathrm{small}} = \{P \in C(K) \big| \|P\| \leq \kappa_1\}$

ここで，P_i を各円錐 $\Gamma_{x_i,\frac{\pi}{12}}$ 内の点で，$\|P_i\| > \kappa_1$ を満たす最小のノルムのものとする．

- $A_{\mathrm{med},i} = \{P \in C(K) \cap \Gamma_{x_i,\frac{\pi}{12}} \big| \|P_i\| \leq \|P\| \leq \kappa_2\|P_i\|\}$
- $A_{\mathrm{large},i} = \{Q \in C(K) \cap \Gamma_{x_i,\frac{\pi}{12}} \big| \|Q\| > \kappa_2\|P_i\|\}$

とする．このとき，各円錐の A_{small}，$A_{\mathrm{med},i}$ には高々有限個の $C(K)$ の有理点があり，$A_{\mathrm{large},i}$ には $C(K)$ の有理点は存在しない．

注意. A_{small}，$A_{\mathrm{med},i}$ の有理点はノースコットの定理より，各 C ごとに有限である．しかし，$\|P\| \leq \kappa_1$ や $\|P\| \leq \kappa_2\|P_i\|$ が，κ_1 や P_i，つまり C に依存するので A_{small}，$A_{\mathrm{med},i}$ の C 上の有理点の個数は，一様有界とは証明できない．なお，κ_1,κ_2 は計算可能であるものの $\|P_i\|$ が計算可能でないため，有理点の個数の上界は，C を固定しても計算可能ではない．

証明. $Q \in A_{\mathrm{large},i}$ とすると，定理 3 より，

$$\begin{aligned} \langle P_i,Q\rangle &\leq \frac{3}{4}\|P_i\|\|Q\| \\ \cos\theta(P_i,Q) &\leq \frac{3}{4} \\ \theta(P_i,Q) &\geq \cos^{-1}\frac{3}{4} > \frac{\pi}{6} \end{aligned} \tag{3}$$

しかし，補題 2 より，

$$\theta(P_i,Q) \leq \theta(P_i,x_i) + \theta(x_i,Q) < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \tag{4}$$

よって，(3), (4) より，矛盾．したがって，$A_{\mathrm{large},i}$ には $C(K)$ の有理点は存在しない． □

3. 参考文献

[1] 森脇淳，川口周，生駒英晃:「モーデル・ファルディングスの定理―ディオファントス幾何からの完全証明」，サイエンス社，2017.

[2] Marc Hindry, Joseph H. Silverman: “ Diophantine Geometry: An Introduction ”, Springer, 2000.