P-13

回帰数列を係数にもつ冪級数の値の数論的性質

Arithmetical properties of values of power series having recursive coefficients

○西林 大樹 [1]
*Hiroki Nishibayashi[1]

Abstract: In this article, we give a survey of arithmetical properties of values of power series, having recursive coefficients. We show the transcendence of such values via Mahler method. We also discuss how to prove the transcendence of the series as function as well as recent developments.

1. はじめに

本稿においては特殊な回帰数列を係数とする冪級数の値の数論的性質を論ずる．まずこの冪級数が関数等式を満たし，Mahler 関数とよばれるものになること，また Mahler の主定理の仮定である関数体 $\mathbb{C}(z)$ 上超越関数になるという事実を証明する．その上で超越関数である Mahler 関数は，収束半径内の非零の代数的数で超越数になることを示す Mahler の方法を適用する．Mahler の方法を適用せず，一般的な結果を従えることのできる最近の新しい証明法についても触れる．

2. Mahler の定理

まず，諸概念の定義を準備する．

定義 1 (house)

α を $\mathbb{Q}$ 上 n 次の代数的数とする．$\mathbb{Q}$ 上 n 個の α の共役数を α_i（$i = 1, 2, \ldots, n$，$\alpha = \alpha_1$）とする．
このとき $\overline{|\alpha|} := \max\limits_{1\le i\le n} \{|\alpha_i|\}$ を α の house と定める．

代数的数 $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対し

$$\overline{|\alpha+\beta|} \le \overline{|\alpha|} + \overline{|\beta|}, \quad \overline{|\alpha\beta|} \le \overline{|\alpha|}\,\overline{|\beta|}$$

が成り立つ．

定義 2 (denominator)

代数的数 α に対し，$d\alpha$ が代数的整数となるような最小の正整数を α の denominator といい，$\mathrm{den}\,(\alpha)$ と表す．

$\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対し，正整数 d が存在して $d\alpha$，$d\beta$ が代数的整数になるならば，$d(\alpha+\beta)$，$d^2\alpha\beta$ も代数的整数になる．

定理 1 (fundamental inequality)

$\mathbb{Q}$ 上次数 n の非零の代数的数 α に対し，次が成り立つ．

$$\log\,(|\alpha|) \ge -2n \cdot \max\left\{\log\left(\overline{|\alpha|}\right),\, \log\,(\mathrm{den}\,(\alpha))\right\}.$$

証明

$d = \mathrm{den}\,(\alpha)$ とすると，$d\alpha$ は代数的整数であるので，そのノルム $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}\,(d\alpha)$ は 0 でない有理整数である．従って

$$\begin{aligned}1 \le \left|\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}\,(d\alpha)\right| &= \left|\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}\,(d)\right| \left|\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}\,(\alpha)\right| \\ &= |d^n| \left|\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right| = d^n |\alpha| \prod_{i=2}^{n} |\alpha_i| \\ &\le d^n |\alpha| \overline{|\alpha|}^{\,n-1}\end{aligned}$$

となる．この式の両辺の対数をとることで

$$0 \le n\log\,(d) + \log\,(|\alpha|) + (n-1)\log\left(\overline{|\alpha|}\right)$$

となり，この式を整理すると

$$\begin{aligned}\log\,(|\alpha|) &\ge (1-n)\log\left(\overline{|\alpha|}\right) - n\log\,(d) \\ &\ge -n \cdot \max\left\{\log\left(\overline{|\alpha|}\right),\, \log\,(d)\right\} \\ &\quad - n \cdot \max\left\{\log\left(\overline{|\alpha|}\right),\, \log\,(d)\right\} \\ &= -2n \cdot \max\left\{\log\left(\overline{|\alpha|}\right),\, \log\,(d)\right\}\end{aligned}$$

がわかる． □

定義 3 (Mahler 関数)

K を代数体とし，$\mathfrak{O}_K$ を K の整数環とする．K 係数冪級数環 $K[[z]] = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ (a_n \in K)\right\}$ を考える．収束半径が $R > 0$ であり，以下の関数等式 ($*$) を満たす $f(z) \in K[[z]]$ を Mahler 関数という．ただし $1 < d \in \mathbb{Z}$，$m \in \mathbb{Z}, m < d$，$a_i(z), b_i(z) \in \mathfrak{O}_K[z]$ とする．

$$f(z^d) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i(z) f(z)^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j(z) f(z)^j} \qquad (*)$$

多項式 $\sum_{i=0}^{m} a_i(z) X^i$，$\sum_{j=0}^{m} b_j(z) X^j$ の終結式は z の多項式になる．この多項式 $\Delta(z)$ と表す．

1 : 日大理工・院（前）・数学

定理 2 (Mahler の定理)

$f(z) \in K[[z]]$ は $K(z)$ 上超越的な関数で，収束半径が $R > 0$ であるとする．また任意の $0 \le k \in \mathbb{Z}$ に対して $\Delta(\alpha^{d^k}) \ne 0$ と仮定する．このとき $0 < |\alpha| < \min\{1, R\}$ を満たす任意の代数的数 α に対し，$f(\alpha)$ は超越数になる．

3. Mahler の定理の適用例

Mahler の定理の応用による超越数の例をあげよう．

命題 1

$0 < |\alpha| < 1$ を満たす任意の代数的数 α に対して，

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2^n}$ は超越数である．

証明

冪級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ を考える．収束半径 1 のこの冪級数が関数等式を満たすこと，$K(z)$ 上超越関数であることを [2] の議論で示そう．まず

$$\begin{aligned} f(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^{2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} - \sum_{n=0}^{0} z^{2^n} \\ &= f(z) - z \end{aligned}$$

より関数等式

$$f(z^2) = f(z) - z \tag{$*$}$$

が成立．

$K(z)$ 上超越関数であることを背理法で証明する．このため $f(z)$ を $K(z)$ 上代数関数と仮定する．このとき

$$\begin{aligned} &f(z)^n + a_{n-1}(z) f(z)^{n-1} + \cdots \\ &\qquad + a_1(z) f(z) + a_0(z) = 0 \quad ({}^{\exists} n \in \mathbb{Z}, n \ge 1) \end{aligned} \tag{1}$$

を満たす $a_i(z) \in K[z]$（$i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$）が存在する．式 (1) に $z = z^2$ を代入すると，関数等式 $(*)$ より

$$\begin{aligned} &f(z^2)^n + a_{n-1}(z^2) f(z^2)^{n-1} + \cdots \\ &\qquad + a_1(z^2) f(z^2) + a_0(z^2) = 0. \\ \therefore\ &(f(z)-z)^n + a_{n-1}(z^2)(f(z)-z)^{n-1} + \cdots \\ &\qquad + a_1(z^2)(f(z)-z) + a_0(z^2) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

式 (2) の項 $f(z)^{n-1}$ の係数は $-nz + a_{n-1}(z^2)$ である．式 (1)，(2) の項 $f(z)^{n-1}$ の係数を比較すると

$$a_{n-1}(z) = -nz + a_{n-1}(z^2). \tag{3}$$

今，$a_{n-1}(z)$ を互いに素な 2 つの多項式 $A(z)$，$B(z) \in \mathbb{C}[z]$ を用いて，$a_{n-1}(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$ と表す．式 (3) より

$$\begin{aligned} \frac{A(z)}{B(z)} &= -nz + \frac{A(z^2)}{B(z^2)} \\ A(z)B(z^2) &= -nzB(z)B(z^2) + A(z^2)B(z) \end{aligned}$$

$$(A(z) + nzB(z))\, B(z^2) = A(z^2)B(z) \tag{4}$$

となる．$A(z^2)$ と $B(z^2)$ は互いに素であるので

$$B(z^2) \mid B(z)$$

である．すなわち

$$\deg\left(B(z^2)\right) = 2\deg\left(B(z)\right) \le \deg\left(B(z)\right)$$

となってしまい，$\deg\left(B(z^2)\right) \le 0$ が従い，$B(z)$ は定数になる．$B(z) = b$ とおくと，式 (4) より

$$\begin{aligned} (A(z) + nzb)\, b &= A(z^2) b \\ A(z) + nzb &= A(z^2) \end{aligned}$$

である．この式の両辺の次数を比較すると

$$\max\{\deg\left(A(z)\right), 1\} = \deg\left(A(z^2)\right) = 2\deg\left(A(z)\right)$$

である．$\deg\left(A(z)\right) < 1$ ならば $1 = 2\deg\left(A(z)\right)$，すなわち $\deg\left(A(z)\right) = \dfrac{1}{2}$ であるため矛盾する．$\deg\left(A(z)\right) \ge 1$ ならば $\deg\left(A(z)\right) = 2\deg\left(A(z)\right)$，すなわち $\deg\left(A(z)\right) = 0$ であるため矛盾する．

以上より，$f(z)$ は $K(z)$ 上超越関数であることがわかる．Mahler 関数の定義である関数等式の分母は 1 で，終結式は 1 になるため，常に非零である．従って， Mahler の定理より，$0 < |\alpha| < \min\{1, R\}$ を満たす代数的数 α に対し，$f(\alpha)$ は超越数であることが従う．

$f(z)$ の他にも Mahler の定理を用いて超越性を示すことのできるものは多い．Thue - Morse 数列や paperfolding 数列など，Automaton 数列を係数にもつ母関数に対しても，同様の超越性が従う場合がある．また最近，より一般的な関数に対し，Schmidt の部分空間定理 [3] を適用することで，Mahler の方法を用いずに超越性が従うこともわかっている [1]．その証明法もいずれ紹介したい．

4. 参考文献

[1] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I*, Ann. of Math., **165**, (2007), 547–565.

[2] Kumiko Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Math., **1631**, Springer, 1996.

[3] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., **785**, Springer, 1980.