P-14

凸計画問題の双対問題
The dual problem of convex programming problem

○佐藤匠,
Takumi Sato

Abstract: In this article, we prove the theorem of the dual problem of convex programming problem .We define the convex programming problem and the dual problem to solve the the dual problem of convex programming problem.

1. 凸計画問題

定義 1 *(凸集合)*
$S \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸集合であるとは, S 内の任意の 2 点 x^1, x^2 に対し, それらを結ぶ線分が S に含まれることである.

定義 2 *(凸関数)*
凸集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が任意の 2 点 $x^1, x^2 \in D$ と任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して,

$$f((1-\alpha)x^1 + \alpha x^2) \leq (1-\alpha)f(x^1) + \alpha f(x^2)$$

を満たすとき, f を D 上の凸関数という. この f が任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$f((1-\alpha)x^1 + \alpha x^2) < (1-\alpha)f(x^1) + \alpha f(x^2)$$

を満たすとき, f を D 上の狭義凸関数という.

定義 3 *(凸計画問題)*
X を基礎となる空間, S を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする.
最適化問題

$$\begin{array}{c} \text{目的関数 } f(x) \to \text{最小} \\ \text{制約条件 } x \in S \cap X \end{array}$$

において, 実行可能領域 $S \cap X$ が凸集合であり, さらに目的関数 f が凸関数である場合, この最適化問題を凸計画問題という.

2. 双対問題と弱双対定理

ここでは

$$\begin{array}{lll} \text{目的関数} & f(x) \to \text{最小} & \\ \text{制約条件} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, & (1) \\ & x \in X & \end{array}$$

という問題を考える. 集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ は任意であるが, 以下の議論では $X = \mathbb{R}^n$ を想定する. この問題のラグランジュ関数は, ラグランジュ乗数ベクトル u を用いて,

$$L(x,u) = f(x) + u^T g(x),\ x \in X, u \in \mathbb{R}^m_+$$

と定義される.

ラグランジュ関数ともとの最適化問題の関係を調べるため, $x \in X$ を固定したのち, u に関する最大値問題

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & L(x,u) \to \text{最大} \\ \text{制約条件} & u \in \mathbb{R}^m_+ \end{array}$$

を導入し, この最大値 $\sup_{u \geq 0} L(x,u)$ を $F(x)$ と記す ($F(x) = +\infty$ となることがある).

元の問題 (1) の最適値を f^* と記すと, 簡単な考察により

$$f^* = \inf_{x \in X} F(x) = \inf_{x \in X} \sup_{u \geq 0} L(x,u)$$

であることが分かる. (ここでは証明は略す)

補題 4 *($\inf - \sup$ と $\sup - \inf$)*
ラグランジュ関数 $L(x,u)$ は次の不等式を満たす.

$$\inf_{x \in X} \sup_{u \geq 0} L(x,u) \geq \sup_{u \geq 0} \inf_{x \in X} L(x,u)$$

証明
任意の $\tilde{x} \in X$ に対して,

$$\begin{array}{rcl} L(\tilde{x},u) & \geq & \inf_{x \in X} L(x,u) \\ \sup_{u \geq 0} L(\tilde{x},u) & \geq & \sup_{u \geq 0} \inf_{x \in X} L(x,u) \end{array}$$

が成り立つ. $\tilde{x}$ は任意であるから, 左辺の $\inf_{\tilde{x} \in X}$ をとっても不等号は成立するので, 補題を得る.

ラグランジュ関数 $L(x,u)$ において, $u \in \mathbb{R}^m_+$ を固定した後, x に関する次の最小化問題を考える.

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & L(x,u) \to \text{最小} \\ \text{制約条件} & x \in X \end{array}$$

この問題の最適値を $q(u)$ と記す. このとき, 元の最適化問題のラグランジュ双対問題とは次の問題である.

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & q(u) \to \text{最大} \\ \text{制約条件} & u \in \mathbb{R}^m_+ \end{array}$$

1: 日大理工・院 (前)・数学

定理 5 *(弱双対定理)*

主問題 *(1)* の最適値を f^*, 双対問題の最適値を q^* と記すと, 次の関係が成り立つ.

$$f^* \geq q^*$$

証明

$f^* = \inf_{x \in X} F(x)$ および $q^* = \sup_{u \geq 0} q(u)$ であることと補題 4 より定理が証明される.

3. 凸計画問題の双対問題

ここでは, 主問題を (1) の形に限定する．ただし, $f(x)$ および $g_i(x)$ は凸関数とし, さらに, 実行可能領域は内点 $x' \in \mathbb{R}^n$ をもつと仮定する. すなわち,

$g_i(x') < 0$, $(\forall i = 1, 2, \cdots, m)$ を満たす x' が存在する　(2)

と仮定する.

定理 6 *(凸計画問題の双対定理)*

凸計画問題 *(1)* は *(2)* を満たすと仮定し, 最適値を f^*, その双対問題の最適値を q^* と記す. このとき, $f^* = q^*$ が成立する。

証明

仮定によって, 主問題は実行可能解をもつので, $f^* < \infty$ である. また, $f^* = -\infty$ ならば, 弱双対定理によって $q^* = -\infty$ であり, 定理が成立するので, 以下では,

$$-\infty < f^* < \infty$$

を仮定する.

次に,

$S = \{(g(x)^T, f(x))^T \mid x \in \mathbb{R}^n\} (\subseteq R^{m+1})$,

$S^+ = \{(w^T, z)^T \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } g(x) \leq w, f(x) \leq z\}$

とおく．S と S^+ の定義より, 明らかに $S \subseteq S^+$ であり, $(w^T, z)^T \in S^+$ かつ $w' \geq w$, $z' \geq z$ ならば, 必ず $((w')^T, z')^T \in S^+$ である. $w = 0$ は元の問題 (1) の制約条件に等しいので, $(0^T, z)^T \in S^+$ は $f(x) \leq z$ を満たす実行可能解 x が存在することと等価である. 従って, 定義より, $(0^T, f^*)^T \in S^+$ である.

最初に S^+ が凸集合であることを示す.

任意の 2 点 $v^k = ((w^k)^T, z^k)^T \in S^+$ $(k = 1, 2)$ を選び, $x^k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2$ が $g(x^k) \geq w^k$, $f(x^k) \geq z^k$ を満たすとする. $\alpha \in [0, 1]$ による v^1 と v^2 の内分点 $(1-\alpha)v^1 + \alpha v^2$ を考える. 同じ α による x^1 と x^2 の内分点 $(1-\alpha)x^1 + \alpha x^2$ は g_i と f の凸性によって,

$$\begin{aligned} g_i((1-\alpha)x^1 + \alpha x^2) &\leq (1-\alpha)g_i(x^1) + \alpha g_i(x^2) \\ &\leq (1-\alpha)w_i^1 + \alpha w_i^2, \\ f((1-\alpha)x^1 + \alpha x^2) &\leq (1-\alpha)f(x^1) + \alpha f(x^2) \\ &\leq (1-\alpha)z^1 + \alpha z^2 \end{aligned}$$

を満たすので, $(1-\alpha)v^1 + \alpha v^2 \in S^+$ を得る．よって, S^+ は凸集合である.

既に述べたように点 $(0^T, f^*)^T$ は S^+ の要素であるが, 内点ではない. もし内点であるならば, その適当な近傍が S^+ に含まれるので, ある $\varepsilon > 0$ に対し, $(0^T, f^* - \varepsilon) \in S^+$ となるが, これは f^* が主問題の最適値であることに反するからである. すなわち, $(0^T, f^*)^T \notin \mathrm{int}\, S^+$ なので, 点 $(0^T, f^*)^T$ と凸集合 S^+ を分離する超平面 $H : u^T w + \beta z = \gamma$ が存在する. ただし, $u \in \mathbb{R}^m$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, また $(u^T, \beta)^T \neq 0$ である．一般性を失うことなく S^+ は H の正側にあるとすると, 点 $(0^T, f^*)^T$ は H 上にあるので,

$$\beta f^* \leq u^T w + \beta z, \forall (w^T, z)^T \in S^+ \quad (3)$$

が成立する. ここで, $w' \geq w$, $z' \geq z$ ならば $((w')^T, z')^T \in S^+$ であることから, $u \geq 0$, $\beta \geq 0$ でなければならない.

$\beta > 0$ であることを示す．　もし, $\beta = 0$ ならば,　性質 (3) によって,

$$0 \leq u^T w, \ \forall (w^T, z)^T \in S^+$$

が成立する．しかし, (2) の内点 x' に対応する $w = g(x')$, $z = f(x')$ は $(w^T, z)^T \in S^+$ を満たし, かつ $w < 0$ であるので, 上式が成り立つには $u = 0$ でなければならない. つまり, $(u^T, \beta)^T = 0$ であるが, これは $(u^T, \beta)^T \neq 0$ に反する.

さて, $\beta > 0$ ならば, ベクトル (u^T, β) 全体を β で割り, $\beta = 1$ と仮定してよい．つまり, 式 (3) を $(w^T, z) = (g(x)^T, f(x)) \in S^+$ に適用して,

$$f^* \leq f(x) + u^T g(x), \ \ x \in X$$

が得られる. x は任意であるから, これより,

$$f^* \leq \inf_{x \in X} \{f(x) + u^T g(x)\} = q(u) \leq q^*$$

となる.

これと弱双対定理による $f^* \geq q^*$ から, $f^* = q^*$ が成り立つ.

4. 今後の研究

凸計画問題は最適化問題の一部にしか過ぎない. 今後は整数計画問題や一般的な線形計画問題の最適解の導出方法の研究を進めていきたい.

5. 参考文献

[1] 茨木 俊秀 『最適化の数学』, 共立出版 (2011)