P-15

跡公式のカスピダル類似と $\mathrm{GL}(2)\times\mathrm{GL}(3)$ の L 関数の中心値の非消滅について

A cuspidal analogue of trace formula and non-vanishing of central values of L-functions for $\mathrm{GL}(2)\times\mathrm{GL}(3)$.

○杉山　真吾 [1]
*Shingo Sugiyama [1]

Abstract: Let ϕ be an even Hecke-Maass cusp form of level 1 such that $L(1/2,\phi)\neq 0$. We give an exact formula of an average of the triple product $\mu_f(\phi)$ of ϕ, f and $\bar{f}$, where f runs over the set H_k, an orthonormal basis of Hecke eigenforms of the space of elliptic cusp forms of weight k and level 1. As an application, we give a quantitative estimate on the infinitude of $f\in\bigcup_{k\geq 12}H_k$ with $L(1/2,\phi\times\mathrm{Ad}(f))\neq 0$. This is a joint work with Masao Tsuzuki (Sophia University).

1. はじめに

さて, $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ を Poincaré 上半平面とする. f を重さ k, レベル 1 の楕円カスプ形式とする. f によって重みづけられた積分

$$\mu_f(\phi)=\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}}\phi(z)|f(z)|^2y^k\frac{dxdy}{y^2}$$

(但し $\phi:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ はテスト関数) は Riemann 面 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ 上の測度を定め, 量子一意エルゴード性 (Quantum Unique Ergodicity, 略して QUE) の観点でこれまで研究されてきた. 本研究ではテスト関数 ϕ をレベル 1 の even な Hecke-Maass カスプ形式で $L(1/2,\phi)\neq 0$ となるものとし, $\mu_f(\phi)$ の Hecke 固有値 $\lambda_f(n)$ による加重平均 (和は重さ k, レベル 1, Petersson ノルム 1 の Hecke 固有形式 f を亘る) の公式を, 数論的データによって exact に記述する. 応用として, $L(1/2,\phi\times\mathrm{Ad}(f))\neq 0$ となる $f\in\bigcup_{k\geq 12}H_k$ が無数に存在することを定量的に与える. ここで Ad は随伴表現 $\mathrm{Ad}:\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\to\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ に付随するリフティングであり, GL(2) の保型表現を GL(3) の保型表現へ写すものである. また $L(s,\phi\times\mathrm{Ad}(f))$ は $\mathrm{GL}(2)\times\mathrm{GL}(3)$ の Rankin-Selberg L 関数である. 本研究は都築正男氏 (上智大学) との共同研究である.

2. 量子一意エルゴード性と保型形式

μ_f の背景について説明しておく. QUE 予想とは, Rudnick, Sarnak (1994) により提唱された次の予想である:「負曲率のコンパクト Riemann 多様体 M のラプラシアン Δ のスペクトル展開に現れる固有値 $0=\lambda_0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$ に対する固有関数からなる完全正規直交系を $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ とする ($\Delta\phi_j=\lambda_j\phi_j$). この時, M の体積要素を $d\mu$ とすると, $\lambda_j\to\infty$ とした時の重み付き測度 $\mu_{\phi_j}=|\phi_j(x)|^2d\mu(x)$ の弱 $*$ 極限 (量子極限) が存在し, その極限は $\mathrm{vol}(M)^{-1}d\mu$ で与えられるだろう」. QUE 予想は整数論, 特に数論的多様体及びその上の保型形式と深い関係にあり, 数論的量子カオスの主題の一つである. 例えば QUE とその整数論への応用に関して, 2010 年に Lindenstrauss が Fields 賞を受賞したことは有名であろう. QUE 予想は非コンパクト数論的多様体 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ でも考えることができて, この場合はラプラシアンの固有関数 ϕ_j にあたるものは Maass 波動形式という実解析的保型形式である. 序盤で紹介した μ_f は, ϕ_j の代わりに $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 不変でない正則関数 f によって定義されている. μ_f に関する QUE は正則量子一意エルゴード性 (holomorphic QUE) と呼ばれている. k ごとに重さ k の Hecke 固有形式 f で Petersson ノルムが 1 となるものを取っておく時, holomorphic QUE 予想とは

$$\lim_{k\to\infty}\mu_f=\frac{3}{\pi}\frac{dxdy}{y^2}$$

という量子極限の存在のことをいう. この予想は Holowinsky, Soundararajan (2010) によって解決された.

3. Exact formula

まず, $\phi:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ をレベル 1 の Maass カスプ形式とする. これは $\mathbb{H}$ 上の双曲ラプラシアン $-y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})$ の固有関数であるので, その固有値を $\frac{1-\nu_\infty^2}{4}$ とする. さらに, ϕ は even かつ Hecke-Maass カスプ形式であるとする. even は $\phi(-\bar{z})=\phi(z)$ を満たすことであり, Hecke-Maass カスプ形式とは, Hecke 作用素の族 $\{T_n\}_n$ の同時固有関数になっていることである. ここでは $n=1$ における ϕ の Fourier 係数が 1 になるように正規化しておく. T_n ($n\in\mathbb{N}$) の固有値を $\lambda_\phi(n)$ とし, 各素数 p に対して, $\lambda_\phi(p)=p^{\nu_p/2}+p^{-\nu_p/2}$ と書くことにする.

$a\in\mathbb{R}$ を変数とする特殊関数を以下のように定める:

$$\mathcal{O}_k^{+,(\nu_\infty)}(a)=\frac{2\pi}{\Gamma(k)}\left|\frac{\Gamma(k+\frac{\nu_\infty-1}{2})}{\pi^{(-1-\nu_\infty)/4}\Gamma(\frac{1+\nu_\infty}{4})}\right|^2\mathrm{ch}_{\{|x|>1\}}(a)\times\sqrt{a^2-1}\mathfrak{P}^{1-k}_{\frac{\nu_\infty-1}{2}}(|a|),$$

$$\mathcal{O}_k^{-,(\nu_\infty)}(a)=\frac{\pi i}{\Gamma(k)}\left|\Gamma\left(k+\frac{\nu_\infty-1}{2}\right)\right|^2\mathrm{sgn}(a)\sqrt{a^2+1}$$

1: 日大理工・教員・数学

$$\times \{\mathfrak{P}^{1-k}_{\frac{\nu_\infty-1}{2}}(ia) - \mathfrak{P}^{1-k}_{\frac{\nu_\infty-1}{2}}(-ia)\}.$$

ここで, $\mathfrak{P}^{\mu}_{\nu}(z)$ は第一種 Legendre 陪関数である (定義域は $\mathbb{C} - (-\infty, 1]$). $\mathrm{ch}_{\{|x|>1\}}$ は $\mathbb{R}$ 上の $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$ の特性関数である.

$\Delta \in \mathbb{Z}$ を判別式とする. 基本判別式全体を $\mathcal{D}$ とする時, $D \in \mathcal{D} \cup \{1\}$ と自然数 $f \in \mathbb{N}$ によって $\Delta = Df^2$ と一意的に書ける. この時,

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}}; \Delta)\\ =&\prod_{p|f}\left(\frac{\zeta_p(-\nu_p)}{L_p(\frac{-\nu_p+1}{2}, \chi_D)}|f|_p^{\frac{\nu_p-1}{2}} + \frac{\zeta_p(\nu_p)}{L_p(\frac{\nu_p+1}{2}, \chi_D)}|f|_p^{\frac{-\nu_p-1}{2}}\right)\end{aligned}$$

とおく.　ここで ζ_p, L_p は Riemann ゼータ関数と Dirichlet L 関数の p-Euler 因子とし, χ_D は類体論により $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ に対応する Dirichlet 指標とする.

$D \in \mathcal{D}$ に対する ϕ の周期 $\mathbb{P}_D(\phi)$ は, 判別式が D の 2 次形式に関係する積分ないし和で定義される. $\mathbb{Z}$ 係数の判別式 D の原始的 2 次形式で負定値でないもの全体を $\mathcal{F}(D)$ とする. この集合には $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ が $(Q[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}])(x, y) = Q(ax+by, cx+dy)$ により作用し, $\mathcal{F}(D)/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ の濃度は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数になる. $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_h\}$ を $\mathcal{F}(D)/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ の完全代表系とし, $\mathrm{Stab}(Q_j) = \{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid Q_j\gamma = Q_j\}$ とおく. $D < 0$ の時は, $Q_j(z, 1) = 0$ の 2 つの解のうち $\mathbb{H}$ に含まれるほうを z_{Q_j} として,

$$\mathbb{P}_D(\phi) = \sum_{j=1}^{h} \frac{1}{\#\mathrm{Stab}(Q_j)}\phi(z_{Q_j})$$

とおく. また, $D > 0$ の時には, $Q_j(z, 1) = 0$ の 2 つの解は実数であり, その 2 つを結ぶ $\mathbb{H}$ 上の測地線を Ω_j とする時,

$$\mathbb{P}_D(\phi) = \sum_{j=1}^{h} \int_{\mathrm{Stab}(Q_j)\backslash\Omega_j} \phi(z)\frac{\sqrt{D}\,dz}{Q_j(z, 1)}$$

とおく.

以上の準備の下で, 次の exact formula が成り立つ.

定理 1 ([1]) $k \geq 4$ は偶数とし, $n \in \mathbb{N}$ とする. この時,

$$\begin{aligned}&\frac{4\pi}{k-1}n^{1/2}\sum_{f\in H_k}\mu_f(\phi)\lambda_f(n)\\ =&\frac{1}{4}\hat{L}(1/2, \phi)\sum_{\substack{(d_1,d_2)\in\mathbb{N}^2\\ n=d_1d_2,\ d_1\neq d_2}}\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}}; (d_1-d_2)^2)\\ &\times \mathcal{O}_k^{+,(\nu_\infty)}(\tfrac{d_1+d_2}{d_1-d_2}) + \frac{1}{2}\sum_{D\in\mathcal{D}}2^{\delta(D<0)}\mathbb{P}_D(\phi)\\ &\times\sum_{t\in\mathcal{T}(n,D)}\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}}; t^2-4n)\mathcal{O}_k^{\mathrm{sgn}(t^2-4n),(\nu_\infty)}(\tfrac{t}{\sqrt{|t^2-4n|}}).\end{aligned}$$

ここで $\hat{L}(s, \phi)$ は ϕ の完備スタンダード L 関数であり, $\delta(D < 0)$ は D が負の時に 1, そうでない時は 0 とする. $\mathcal{T}(n, D) = \{t \in \mathbb{Z} \mid \exists f \in \mathbb{N}, t^2 - 4n = Df^2\}$ とおく. 第 2 項の無限和は絶対収束する.

$4 \leq k < 12$ の時は楕円カスプ形式の空間は 0 次元だが, この時も上の公式が成立することに注意せよ.

ϕ がカスプ形式でない場合を考えると, ϕ が定数関数 1 の時, 対応する公式は Eichler-Selberg 跡公式である. また ϕ が実解析的 Eisenstein 級数の場合に対応する公式は Zagier の公式である. 従って, 上の公式は Eichler-Selberg 跡公式や Zagier の公式の類似物といえる.

判別式 $\Delta = Df^2$ に対して $\mathbb{P}_\Delta(\phi) = \mathbb{P}_D(\phi)$ とおく. 上の公式の応用として, $\mu_f(\phi)$ の 1 次モーメントの漸近公式を得ることができる.

定理 2 ([1]) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned}&\frac{2}{K}\sum_{k\in[K,2K)\cap2\mathbb{N}}(-1)^{k/2}\sum_{f\in H_k}\mu_f(\phi)\lambda_f(n)\\ &\xrightarrow{K\to\infty}\frac{1}{2}n^{-1/2}\mathbb{P}_{-4n}(\phi)\mathbf{B}(\nu_{\mathrm{fin}}; -4n).\end{aligned}$$

さらに, この漸近公式の応用も述べておく.

$$X_\phi := \{n \in \mathbb{N} \mid -4n \in \mathcal{D} \quad \& \quad L(1/2, \phi \otimes \chi_{-4n}) \neq 0\},$$

$$N_{\phi,n}(K) := \#\{f \in \bigcup_{K\leq k<2K} H_k \mid L(1/2, \phi\times\mathrm{Ad}(f))\lambda_f(n) \neq 0\}$$

とおき, $d(n) := \sum_{0<d|n} 1$ とする.

系 3 ([1]) $L(1/2, \phi) \neq 0$ を仮定する. この時, 任意の $n \in X_\phi$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $K_{\phi,n,\epsilon} > 0$ が存在して, 任意の $K \geq K_{\phi,n,\epsilon}$ に対して,

$$N_{\phi,n}(K) \geq \frac{1-\epsilon}{16\pi}\frac{1}{\sqrt{n}\,d(n)^2}\frac{L(1/2, \phi\otimes\chi_{-4n})}{C(\phi)L(1, \mathrm{Ad}(\phi))} \times K.$$

ここで, $C(\phi) = \prod_p (1 - p^{-2})(1 - \frac{p^{-1}\lambda_\phi(p)}{p^{1/2}+p^{-1/2}})$ である.

注意として, $0 < \epsilon < 1$ の時, 不等式の右辺は正である. また, 系の仮定を満たす ϕ と n は沢山ある. 実際, 本橋 (1992) の結果より, $L(1/2, \phi) \neq 0$ なる ϕ は無数に存在し, Friedberg, Hoffstein (1995) の結果より X_ϕ も無限集合である. Luo, Sarnak (2004) の 2 次モーメントの漸近公式から分かるのは $\lim_{K\to\infty} N_{\phi,1}(K) = \infty$ なので, 上の系は彼らの結果の n 付き定量化である.

最後に証明について簡単に述べておく. 定理 1 は, 保型形式をアデールに持ち上げて $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現の言葉で書き下すことで示される. これにより球関数の重複度 1 定理が有効になる. 定理 2 は, 定理 1 の右辺の各項を k に関して評価することで得られる. 系 3 は Luo, Sarnak の 2 次モーメントの漸近公式と定理 2 の 1 次モーメントの漸近公式を組み合わせて, Cauchy-Schwarz の不等式を使って証明する. 詳細は [1] を参照せよ.

4. 参考文献

[1] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *Quantitative non-vanishing of central values of certain L-functions on* $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(3)$, preprint. https://arxiv.org/abs/1805.00209