

Fokker-Planck 方程式の指数減衰評価
An exponential decay estimate for the Fokker-Planck equation

○松山 智香¹
 *Tomoka Matsuyama¹

Abstract: We consider large-time behavior of the Fokker-Planck equation. It is natural to study the Fokker-Planck equation in the L^1 space because of the conservation law. We derive the limit of the solution as $t \rightarrow \infty$, and show L^1 convergence and an exponential decay estimate in L^1 . To prove the estimate, we introduce the logarithmic entropy. Next, we derive the decay of the entropy. Combining the entropy decay and the Csiszár-Kullback-Pinsker inequality, we obtain the L^1 decay estimate.

1. はじめに

$u = u(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を未知関数とする以下の微分方程式を考察する:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ は非負で

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx = 1 \quad (2)$$

をみたすとし、 $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられた滑らかな凸関数で $e^{-V} \in L^1(\mathbb{R})$ を仮定する。(1) は、線形 Fokker-Planck 方程式と呼ばれている。以下、(1) の解は非負で滑らかな関数であり、 $x \rightarrow \pm\infty$ の時 u と $\frac{\partial u}{\partial x}$ が 0 に収束することと、 $\frac{\partial V}{\partial x}$ が有界であることを仮定する。このとき、次の保存則が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx = 1. \quad (3)$$

(1) で $V = 0$ とすると熱方程式 (4) が得られる:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

このことから Fokker-Planck 方程式は熱方程式の拡張になっていることがわかる。本稿では L^1 空間における解の指数減衰評価の導き方を [2] に従って説明する。

2. Fokker-Planck 方程式の指数減衰

本稿での主結果である Fokker-Planck 方程式の指数減衰評価について述べる。初めに (1) の右辺を

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial x} = u \frac{\partial}{\partial x} (\log u + V) \quad (5)$$

と変形する。 $u_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial x} (\log u_\infty + V) = 0$$

となることが推測できる。よって Z を $\log u_\infty + V = \log Z$ となるような定数に定める。これを u_∞ についてとくと、(3) に注意して

$$u_\infty(x) := Z e^{-V(x)}, Z := \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-V(y)} dy \right)^{-1}$$

が得られる。この u_∞ を使って $\phi(s) = s(\log s - 1) + 1$ とおき

$$H_\phi[u] := \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{u}{u_\infty}\right) u_\infty dx \quad (6)$$

で定める。(3) を用いると、

$$\begin{aligned} H_\phi[u] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u}{u_\infty} \left(\log \frac{u}{u_\infty} - 1 \right) + 1 \right) u_\infty dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (u \log u - u \log u_\infty - u + u_\infty) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (u \log u - u \log u_\infty) dx \end{aligned}$$

になることに注意する。この H_ϕ を用いて、Fokker-Planck 方程式の指数減衰評価を述べる。

定理 1 (Fokker-Planck 方程式の指数減衰). $s > 0$ に対して $\phi(s) = s(\log s - 1) + 1$ と定める。(2) をみたす非負の u_∞ は $H_\phi[u_0] < \infty$ とし、ある $\lambda > 0$ が存在して $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \geq \lambda$ となると仮定する。 $u(x, t)$ を (1) の滑らかな解とすると任意の t に対して

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^1(-\infty, \infty)} \leq e^{-\lambda t} \sqrt{2} H_\phi[u_0]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

が成り立つ。

(3) より $\|u\|_{L^1(-\infty, \infty)}$ の減衰評価はえられない。よって $u - u_\infty$ の L^1 ノルムでの減衰評価が重要になる。 H_ϕ を用いることにより L^1 ノルムの減衰評価を得ることができるとくに

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^1(-\infty, \infty)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が得られる。

3. 定理1の証明の概要

以下 $\partial u/\partial x$ を u_x , $\partial u/\partial t$ を u_t で表す。定理1の証明は3つのステップで行われる。ステップ1では、 $\frac{d}{dt}H_\phi[u]$ が非負であることを証明する。 $\rho = u/u_\infty$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_\phi[u] &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{u}{u_\infty}\right) u_\infty dx & (8) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\rho) u_\infty dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(\rho) \partial_t u dx \end{aligned}$$

となる。(1)より $u_t = (u_\infty \rho_x)_x$ となるので部分積分により

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(\rho) u_t dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(\rho) (u_\infty \rho_x)_x dx & (9) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} (\phi'(\rho))_x u_\infty \rho_x dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \phi''(\rho) |\rho_x|^2 u_\infty dx \leq 0 \end{aligned}$$

となり、

$$\frac{d}{dt}H_\phi[u] \leq 0 \quad (10)$$

であることがわかった。

ステップ2では $t > 0$ に対して $H_\phi[u]$ を二回微分する。すると、部分積分と ϕ の性質、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}V \geq \lambda$ を用いることで

$$\frac{d^2}{dt^2}H_\phi[u] \geq -2\lambda \frac{d^2}{dt^2}H_\phi[u] \quad (11)$$

が得られる。 $s > 0$ に対して(10)を (s, ∞) 上で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_\phi[u(s)] - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}H_\phi[u(t)] & & (12) \\ \leq -2\lambda \left(H_\phi[u(s)] - \lim_{t \rightarrow \infty} H_\phi[u(t)] \right) \end{aligned}$$

となる。上の式に現れる2つの極限が0に収束するので

$$\frac{d}{dt}H_\phi[u(s)] \leq -2\lambda H_\phi[u(s)] \quad (13)$$

が成り立つ[?]。ここで次の Gronwall の不等式を用いる。

命題2. $f \in C(0, \infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f'(t) \leq -\lambda f(t)$ が全ての $t > 0$ に対して成り立つならば

$$f(t) \leq e^{-\lambda t} f(0) \quad (14)$$

となる。

Gronwall の不等式から

$$H_\phi[u](s) \leq H_\phi[u_0] e^{-2\lambda s} \quad (15)$$

とできる。

注意3. $H_\phi[u]$ の1階微分を計算した(10)を用いると $H_\phi[u]$ が減衰することはわかるが、どのような速さで減衰するかはわからない、他方で $H_\phi[u]$ の2階微分を計算することで得られる不等式(11)と Gronwall の不等式を組みあわせることで $H_\phi[u]$ が指数減衰することが示せる。

最後のステップでは(15)を用いて $u - u_\infty$ が L^1 で指数減衰することを示す。そのために次の Csiszár-Kullback-Pinsker の不等式を用いる。

命題4 ([2, Theorem A.2]). $f, g \in L^1(-\infty, \infty)$ は $f \geq 0, g > 0$ と

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dx = \int_{-\infty}^{\infty} g dx = 1$$

をみたすと仮定する。すると

$$\|f - g\|_{L^1(-\infty, \infty)}^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} (f \log f - f \log g) dx \quad (16)$$

が成り立つ。

Csiszár-Kullback-Pinsker の不等式より

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_\infty\|_{L^1(-\infty, \infty)}^2 &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} (u \log u - u \log u_\infty) dx \\ &= 2H_\phi[u] \end{aligned}$$

より(15)から

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^1(-\infty, \infty)}^2 \leq 2H_\phi[u_0] e^{-2\lambda t} \quad (17)$$

となる。よって(7)が得られた。

注意5. $H_\phi[u]$ を u の対数エントロピーといい $-\frac{dH_\phi}{dt}[u]$ をエントロピー生成項とよぶ。対数エントロピー $H_\phi[u]$ を $t \rightarrow \infty$ とした時0に指数減衰することを示すことにより、 L^1 ノルムの減衰評価を導く。この手法をエントロピー消散法という[1, 2]。

注意6. 定理1の $\phi(s) = s(\log s - 1) + 1$ は一般的に凸関数 $\phi \in C^4(0, \infty)$ で $\phi(1) = 0$ かつ $1/\phi''$ が凹関数であればよい。この条件のもとで(10), (11)を導くことができる[2, Theorem 2.1]。さらにこの条件をみたす ϕ に対して、一般的な Csiszár-Kullback-Pinsker の不等式

$$\|f - g\|_{L^1(-\infty, \infty)}^2 \leq \frac{2}{\phi''(1)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{f}{g}\right) g dx.$$

が知られている[2, Theorem A.3]。

4. 参考文献

- [1] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, A. Unterreiter, On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations. Comm. Partial Differential Equations 26 (2001), 43–100.
- [2] A. Jüngel, “Entropy methods for diffusive partial differential equations”, Springer, 2016.