P-5

マルコフ過程に関する大偏差原理とその応用

The large deviation principle for Markov processes and its application

森泉 公平 [1]
Moriizumi Kouhei[1]

Abstract: In this talk, we discuss the large deviation principle for Markov processes and its application.

1. はじめに

$\mathcal{X}$ を完備可分距離空間とし、$\{P_n\}_{n\geq 1}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 上の確率測度の列とする。大数の法則のように分布 P_n が退化分布 $\delta_x (x \in \mathcal{X})$ に収束しているとき、収束先から離れた集合 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), x \notin \overline{A}$ に対し、

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = 0$$

であるが、より詳細に $\mathcal{X}$ 上の関数 I に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \log P_n(A) = -\inf_{y\in A} I(y) \quad (p > 0)$$

が成り立つかを考える。分布の弱収束同様、集合 A の境界での振る舞いが問題となるため、次の形で定式化する。

定義 1. 以下の条件が満たされるとき、列 $\{P_n\}$ が $I(x)$ を *rate* 関数として大偏差原理が成り立つという。

1. $I : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ は下半連続
2. 集合 $K_\ell = \{x \in \mathcal{X} : I(x) \leq \ell\}$ は $\mathcal{X}$ 上でコンパクト
3. 任意の閉集合 $C \subset \mathcal{X}$ に対し、
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(C) \leq -\inf_{x\in C} I(x)$$
4. 任意の開集合 $G \subset \mathcal{X}$ に対し、
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(G) \geq -\inf_{x\in G} I(x)$$

本講演ではマルコフ連鎖、スケール変換したランダムウォークに対する大偏差原理とその応用について概説する。

2. マルコフ連鎖に対する大偏差原理

マルコフ連鎖に対する大偏差原理を述べる。ここでは状態空間 $\mathcal{X}$ は有限集合とする。$\{X_i\}$ を $\mathcal{X}$ 上のマルコフ連鎖とし、$\{p(x,y)\}$ を $\mathcal{X}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_i\}$ の推移確率行列とする。ここでは、既約性を仮定する。このとき、以下を満たすような定常分布 $\pi = \{\pi(x)\}$ がただ一つ存在する。

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} \pi(x)p(x,y) = \pi(y), \quad y \in \mathcal{X}$$

大数の法則により、任意の $x \in \mathcal{X}, f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ に対し、時刻 0 で x から出発するマルコフ連鎖の分布 P_x に関して、確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(X_j) = \sum_{x\in\mathcal{X}} f(x)\pi(x)$$

が成り立つ。特に任意の $\delta > 0$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} P_x \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(X_j) - \sum_{x\in\mathcal{X}} f(x)\pi(x) \right| \geq \delta \right] = 0 \quad (2.1)$$

となる。これを経験分布

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{X_j}$$

を用いて言い換えると、$\mathcal{X}$ 上の 確率測度全体 $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ に値をとる確率変数の列として、π に収束することに他ならない。故に、P_x の下での α_n の分布を $Q_{n,x}$ と定義すると、

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n,x} = \delta_\pi$$

が成り立つ。対応する大偏差原理は次の形で成立する。

定理 2. *(Theorem4.7, [1])*
$Q_{n,x}$ は以下の $I(\mu)$ をの *rate* 関数として大偏差原理を満たす：

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \sup_{u>0} \sum_{x\in\mathcal{X}} \mu(x) \log \frac{u(x)}{(pu)(x,y)} \\ &= \inf_{q:\mu q=\mu} \sum_{x,y\in\mathcal{X}} \mu(x)q(x,y) \log \frac{q(x,y)}{p(x,y)} \end{aligned}$$

ただし、上の上限は非負値関数 u 全体でとり、下限は推移確率 $q(x,y)$ であって μ を定常分布として持つもの、つまり $\mu q = \mu$ を満たすもの全体でとる。また、

$$(pu)(x) = \sum_{y\in\mathcal{X}} p(x,y)u(y)$$

とする。

1: 日大理工・院 (前)・数学

この大偏差原理の系として、

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(X_j)-\sum_{x\in\mathcal{X}}f(x)\pi(x)\right|\geq\delta\right]$$
$$\leq-\inf\left[I(\mu):\left|\sum_{x\in\mathcal{X}}f(x)(\mu(x)-\pi(x))\right|\geq\delta\right]$$

のようになり、式 (2.1) は少なくとも指数的減衰を示すことが分かる。

3. ランダムウォークのスケール変換に対する大偏差原理

マルコフ連鎖の例として、$\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークに対し、スケール変換を施したものに対する大偏差原理について述べる。

$S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の最近接ランダムウォークとする。各 ξ_i は独立であって、原点の隣接点 $\{\pm e_r;1\leq r\leq d\}$ を確率 $\frac{1}{2d}$ で選ぶ。ただし、$\{e_r;1\leq r\leq d\}$ は $\mathbb{Z}^d$ 上の単位ベクトルである。ここで、ランダムウォークの各成分を mod N をで考えることにより、$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の元に対応づけられる。さらにスケール変換を施す。すなわち、

$$(x_1,\cdots,x_d)\mapsto\left(\frac{x_1}{N},\cdots,\frac{x_d}{N}\right)\in[0,1)^d=:\mathbb{T}^d$$

ただし、$x_i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, i=1,\cdots,d$ である。

このようにして、$\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークから $\mathbb{T}^d$ 上のマルコフ連鎖 $X=\{X_i\}$ を定め、$P_{N,x}$ を x 出発のマルコフ連鎖の分布とする。ここで、α_n を X の経験分布

$$\alpha_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{X_j}$$

とおく。N を止めて $n\to\infty$ とすると、α_n は $\frac{1}{N}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ 上の点に等確率で分布する確率測度に収束する。これに対する大偏差原理は定理 2 にある通りである。ここでは、n,N を同時に大きくすることを考える。$n=N^2k$ としたとき、$\mathbb{T}^d$ 上のブラウン運動 $\{B_t\}$ に対して、N が大きければ、連続関数 $f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}$ に対して、

$$\int_{\mathbb{T}^d}f(x)\alpha_n(dx)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(X_j)\fallingdotseq\frac{1}{k}\int_0^k f(B_t)dt$$

と思えて、$N\to\infty$ と共に $k\to\infty$ とすれば、α_n は $\mathbb{T}^d$ 上のブラウン運動の定常分布、すなわち、$\mathbb{T}^d$ 上の一様分布に収束するのではないかと思われる。$P_{N,x}$ の下での α_n の分布を $Q_{n,N,x}$ とすると、これに対応する大偏差原理が定理 3 である。

定理 3. *(Theorem4.12, [1])*

任意の閉集合 $C\in\mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$ に対して、

$$\limsup_{\substack{N\to\infty\\ k=\frac{n}{N^2}\to\infty}}\frac{1}{k}\log Q_{n,N,x}(C)\leq-\inf_{\mu\in C}I(\mu)$$

が成り立つ。また、任意の開集合 $G\in\mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$ に対して、

$$\liminf_{\substack{N\to\infty\\ k=\frac{n}{N^2}\to\infty}}\frac{1}{k}\log Q_{n,N,x}(G)\geq-\inf_{\mu\in G}I(\mu)$$

が成り立つ。ただし、$d\mu=fdx$ かつ $\nabla\sqrt{f}\in L_2(\mathbb{T}^d)$ ならば、

$$I(\mu)=\frac{1}{8d}\int\frac{||\nabla f||^2}{f}dx=\frac{1}{2d}\int||\nabla\sqrt{f}||^2dx$$

そうでない場合は $I(\mu)=\infty$ とする。

この応用として $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークが訪問する格子点の数について考える。D_n は $\mathbb{Z}^d$ 上の $S_1,\cdots,S_n$ の範囲とし、$|D_n|$ を D_n の元の個数とする。すなわち、$|D_n|$ は n ステップの間にランダムウォークによって訪問された $\mathbb{Z}^d$ 上の相異なる点の数である。

ここでは、$\nu>0$ に対し、$E(\exp(-\nu|D_n|))$ の $n\to\infty$ としたときの振る舞いを考える。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理 4. *(Theorem 1, [2])*

$\nu>0$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{d}{d+2}}}\log E(\exp(-\nu|D_n|))=-k(\nu)$$

が成り立つ。ただし、ディリクレ境界条件を課した大きさ 1 の球内で考えたときの $-\frac{1}{2}\Delta$ の最小固有値 γ_d に対し、

$$k(\nu)=\nu^{\frac{2}{d+2}}\left(\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{\frac{d}{d+2}}$$

である。ここで Δ はラプラス作用素、つまり、

$$\Delta=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

である。

4. 参考文献

[1] S. R. S. Varadhan, Large Deviations, American Mathematical Society, 2016.

[2] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan, On the number of distinct sites visited by a random walk, Commun. Pure Appl. Math., **32**(1979), 721–747