P-6

ラプラス作用素の第 k 固有関数に対する節領域定理について
On the nodal domain theorem for the kth eigenfunction of the Laplacian operator

○渡辺　雅矢
Masaya Watanabe

Abstract: We describe the nodal domain theorem for the kth eigenfunction of the Laplacian operator by R.Courant.

1. はじめに

一般に楕円型作用素の固有関数の零点集合を, その関数の節と呼び, その補集合の連結成分を節領域の呼ぶ.

R.クーラントの古典的な節領域定理とは, ラプラス作用素の固有関数の節領域の個数の評価を与えたもののことをいう.この節領域定理に依れば, 若い番号の固有関数ほど単純で, 番号が増えるにつれ, 複雑さが増していくことである.

2. ラプラス作用素の境界値問題

(M,g) を n 次元連結な C^∞完備リーマン多様体とする (コンパクトとは仮定しない). Δ を (M,g) のラプラス作用素とする. $D \subset M$ を M の開領域とし, D の閉包 $\overline{D}$ がコンパクトであるものとする. $\partial D := \overline{D}\backslash D$ で D の境界を表すとする. $\overline{D}$ で定義された恒等的には零でない関数 φ が

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \nu\varphi & (D \text{ 上で}) \\ \varphi = 0 & (\partial D \text{ 上で}) \end{cases} \tag{1}$$

を満たすとき, ν を D 上のディリクレ境界値固有値問題の固有値といい, φ をその固有値の固有関数という (D 上の固定膜の境界値問題).

D の境界 ∂D が区分的に滑らかなら, (1) の固有値全体は $\mathbb{R}$ 内の離散集合をなし, 各固有値の固有空間は有限次元となる. 固有値を重複度を込めて,

$$(0 <)\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_k \leq \cdots \tag{2}$$

と並べると, $\nu_k \to \infty (k \to \infty)$ である.

D 上の実数値連続関数に対して, L^2内積と L^2ノルム を,

$$(\varphi, \psi) := \int_D \varphi\, \psi\, v_g, \quad \|\varphi\|^2 := (\varphi, \varphi) \tag{3}$$

とする. (3) の v_g はリーマン多様体 (M,g) の体積要素である. このとき, (M,g) のラプラス作用素 Δ の相異なる固有値に対する固有空間はこの L^2内積 に関して直交し, 各固有値 ν_i に対する固有関数 $\varphi_i (i = 1,2,....)$ が,

$$L^2(D) := \{\varphi | D \text{ 上の可測関数で}, \|\varphi\| < \infty \text{ を満たす } \}$$

の完全正規直交系をなすようにできる.

他方で, (M,g) がコンパクト・リーマン多様体で, $\partial M = \emptyset$ の場合,

$$\Delta u = \lambda u \quad (M \text{ 上で}) \tag{4}$$

の固有値 λ の固有関数 u を求める問題は自由膜の問題という. (2) のように, (4) の固有値を重複度を込めて

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \tag{5}$$

と並べると, $\lambda_k \to \infty (k \to \infty)$ である.

3. R. クーラントの節領域定理

定理 1 (A) 固定膜の境界値問題 (1) の第 k 番目の固有値 ν_k の固有関数の節領域の個数は k 以下である.
(B) 自由幕の固有値問題 (4) の第 k 番目の固有値 λ_k の固有関数の節領域の個数も k 以下である.

証明を行うにあたって, 定理 2, 命題 3 を認めた上で行う.

定理 2 L をユークリッド空間 ($\mathbb{R}^n$, $(x^1, ..., x^n)$) 内の領域 U 上の 2 階の各係数関数が C^∞ となる楕円型偏微分作用素とする. U 上の $Lf = 0$ の解 f が U 内の 1 点 p において, 任意の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ に対して,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x^n)^{\alpha_n}}(p) = 0 \tag{6}$$

を満たすとする. ここで $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ である. このとき f は U 上で恒等的に零である.

命題 3 境界を持たない n 次元リーマン多様体 (M,g) のラプラス作用素 Δ と M 上の C^∞ 関数 h に対して, M 上の C^∞ 関数 f が

$$(\Delta + h)\, f = 0 \tag{7}$$

を満たすとする. このとき, f の節, $f^{-1}(0)$ は M 内の $(n-1)$ 次元測度 0 の閉集合を除いて, $(n-1)$ 次元 C^∞ 部分多様体となる.

証明. (定理 1(A) の証明のみ行う) M 内の領域 D に対する (1) の第 k 固有値を ν_k, 第 k 固有関数を φ_k とし,φ_k の節領域の個数が $k+1$ 以上であるとして, 矛盾を導く.

1: 日大理工・院 (前)・数学

1). いま, $D_1, D_2, \cdots, D_k, D_{k+1}, \cdots$ を φ_k の節領域とする. $1 \le j \le k$ に対して,

$$\varphi_k{}^j := \begin{cases} \varphi_k & (D_j\text{上で}) \\ 0 & (D_j\text{の外で}) \end{cases} \tag{8}$$

とおく. このとき, $\{\varphi_k{}^j\}_{j=1}^k$ は一次独立なので, どれかは零でない実数 $a_1, \cdots, a_k$ を選び, $\widetilde{\varphi} := \sum_{j=1}^k a_j \varphi_k{}^j$ としたとき,

$$(\widetilde{\varphi}, \varphi_\ell) := \int_D \widetilde{\varphi}\, \varphi_\ell\, v_g = 0 \quad (\text{全ての}\ \ell = 1, ..., k-1\ \text{に対して}) \tag{9}$$

となるようにできる.

最大・最小原理より, 固有値 ν_k は次の評価を得る :

$$\begin{aligned} \nu_k &= \inf_{\substack{\varphi=0\ (\partial D\ \text{上}), \\ (\varphi,\varphi_\ell)=0 (\forall \ell=1,...,k-1)}} \frac{\int_D \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle\, v_g}{\int_D \varphi^2\, v_g} \\ &\le \frac{\int_D \langle \nabla\widetilde{\varphi}, \nabla\widetilde{\varphi} \rangle\, v_g}{\int_D \widetilde{\varphi}^2\, v_g} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^k a_j{}^2 \int_{D_j} \langle \nabla\varphi_k, \nabla\varphi_k \rangle\, v_g}{\sum_{j=1}^k a_j{}^2 \int_{D_j} \varphi^2{}_k\, v_g}. \end{aligned} \tag{10}$$

. 2). 命題 3 より, φ_k の節は, $(n-1)$ 次元測度が 0 の閉集合を除いて $(n-1)$ 次元 C^∞ 多様体である. $\varphi_k = 0$ (∂D_j 上) より,

$$\begin{aligned} \int_{D_j} \langle \nabla\varphi_k, \nabla\varphi_k \rangle\, v_g &= \int_{D_j} (\Delta\varphi_k)\, \varphi_k\, v_g \\ &= \nu_k \int_{D_j} (\varphi_k)^2\, v_g \end{aligned} \tag{11}$$

となり, (11) を (10) の右辺に代入すると,

$$\nu_k = \frac{\int_D \langle \nabla\widetilde{\varphi}, \nabla\widetilde{\varphi} \rangle\, v_g}{\int_D \widetilde{\varphi}^2\, v_g} \tag{12}$$

を得る.

3). (12) により, $\widetilde{\varphi}$ は D 上 C^∞ 関数, かつ $\Delta\widetilde{\varphi} = \nu_k \widetilde{\varphi}$ を満たす. なぜなら, $\widetilde{\varphi}$ は $\overline{D}$ 上連続であるので, D 上のディリクレ固有値問題の固有関数を用いて展開した級数 $\widetilde{\varphi} = \sum_{i=1}^\infty b_i\, \varphi_i$ は $\overline{D}$ 上で一様収束する. 他方で, $\widetilde{\varphi}$ の定義より, $\widetilde{\varphi}$ は各 D_j $(j = 1, ..., k)$ 上で C^∞ である. 従って, その上の各点において, $\nabla\widetilde{\varphi} = \sum_{i=1}^\infty b_i \nabla\varphi_i$ を満たし, D 上の L^2 内積 $\|\cdot\|_{L^2(D)}$ に関して収束している. また, (9) より $b_\ell = (\widetilde{\varphi}, \varphi_\ell) = 0$ $(\ell = 1, ..., k-1)$ となる. 従って, (12) は

$$\begin{aligned} \nu_k &= \frac{\int_D \langle \nabla\widetilde{\varphi}, \nabla\widetilde{\varphi} \rangle\, v_g}{\int_D \widetilde{\varphi}^2\, v_g} = \frac{\sum_{j=1}^k \int_{D_j} \langle \nabla\widetilde{\varphi}, \nabla\widetilde{\varphi} \rangle\, v_g}{\sum_{j=1}^k \int_{D_j} \widetilde{\varphi}^2\, v_g} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^\infty b_i{}^2 \int_{D_j} \langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_i \rangle\, v_g}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^\infty b_i{}^2 \int_{D_j} \varphi_i{}^2\, v_g} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^\infty b_i{}^2 \int_{\bigcup_{j=1}^k D_j} \langle \Delta\varphi_i, \varphi_i \rangle\, v_g}{\sum_{i=1}^\infty b_i{}^2 \int_{\bigcup_{j=1}^k D_j} \varphi_i{}^2\, v_g} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^\infty b_i{}^2 \nu_i}{\sum_{i=1}^\infty b_i{}^2} \\ &= \frac{\sum_{i=k}^\infty b_i{}^2 \nu_i}{\sum_{i=k}^\infty b_i{}^2} \end{aligned} \tag{13}$$

となり, (13) 式を変形すると,

$$\sum_{i=k+1}^\infty b_i{}^2 (\nu_i - \nu_k) = 0 \tag{14}$$

を得る. ここで (2) のように $\nu_i \ge \nu_k$ $(k \le \forall i)$ としていたので, (14) より, $\nu_i - \nu_k = 0$ $(k+1 \le \forall i)$ を得る. 従って, $\widetilde{\varphi} = b_k \varphi_k$ となる.

4). いま $\widetilde{\varphi}$ は, その作り方により, D 内の空でない開集合 D_{k+1} 上で恒等的に零. 一方で, 3) より D 上で $\Delta\widetilde{\varphi} = \nu_k \widetilde{\varphi}$ を満たす C^∞ 関数である. このことより, $\widetilde{\varphi}$ は D 上で恒等的に零とならなければならない.

5). 4) の証明は定理 2 より次のように示される. $L := \Delta - \nu_k$ とし,$\forall x \in D \setminus D_{k+1}$ に対して, x と D_{k+1} 内の一点 y を結ぶ D 内の連続曲線 γ を任意に取り, γ を M の座標開近傍 $U_{\alpha_i} (i = 1, 2, ..., \ell)$ で覆い, $V_{\alpha_i} := U_{\alpha_i} \cap D$ $(i = 1, ..., \ell)$ とおく. $x_i \in V_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_{i+1}}$ $(i = 1, 2, ..., \ell-1), x_1 = y, x_\ell = x$ となるようにする. 始めに, V_{α_1} について, $L\widetilde{\varphi} = 0$ かつ $\widetilde{\varphi} \equiv 0$ ($V_{\alpha_1} \cap D_{k+1}$上) であるので, 定理 2 より, $\widetilde{\varphi} \equiv 0$ (V_{α_1} 上) となる. 次に V_{α_2} で $L\widetilde{\varphi} = 0$ かつ $\widetilde{\varphi} = 0(V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2}$上$)$ であるので, 定理 2 より, $\widetilde{\varphi} = 0(V_{\alpha_2})$ を得る. この操作を $\ell - 1$ 回繰り返すことで $\widetilde{\varphi} \equiv 0$ (V_{α_ℓ}上) を得る. 故に D 上で $\widetilde{\varphi} \equiv 0$ を得る. (証明終了)

4. 参考文献

[1] 浦川 肇 著 共立講座 数学の輝き 3 スペクトル幾何 (2015).

[2] R. Courant and D. Hilbert, “Method of Mathematical Physics” II, Wiley-Interscience, 1962, p.160.

[3] N. Aronszajn, J. Math. Pures Appl., Vol 36 (1957), pp. 235-249.