P-7

マトロイド表現可能性の極小禁止マイナーによる特徴づけについて

On Excluded Minors' Characterization of Matroid Reprensentability

○平石秀史 [1],
*Hidefumi Hiraishi[1]

Abstract: Matroids were originally introduced by H. Whitney in 1935 in an attempt to characterize linear independence of vectors. Then, matroids have turned out to be not just underlying structures of a wide range of mathematical obejects beyond linear independence, but relevant to algorithm design theory for combinatorial optimization. In this article, we overview the excluded minors' characterization of representability of matoroids over infinite fields. Listing excluded minors is one of the prominent ways to characterize the properties of graphs and matroids. While all minor-closed properties of graphs can be characterized by a finite list of excluded minors, this is not the case for matroids. We show that the representability over some infinite fields has an infinite number of exluded minors even within restriced classes of matroids.

1. はじめに

マトロイドは，様々な離散幾何学的な構造の背後に現れる疎構造である．マトロイドは，1932 年に H.Whitney によってベクトル空間の一次独立性の公理化を目的として定義された [1]．その後，ベクトル空間の一次独立性だけでなく，様々な離散的・組合せ論的な対象がマトロイドの枠組みで統一的な取り扱えることが明らかになった．さらに組合せ最適化問題に対するアルゴリズム設計おいても，マトロイド構造が貪欲法の設計に有効であることが分かるなど，離散幾何学・組合せ論の分野だけでなく，アルゴリズム理論においても重要な立ち位置を占めることが明らかになった．

マトロイドには多くの等価な公理系が存在するが，ここでは基族による公理系を紹介する．

定義 1 E を有限集合とする．E の部分集合族 $\mathcal{B} \subset 2^E$ が次の二つの公理を満たす時，$\mathcal{B}$ を基族と呼び，$(E, \mathcal{B})$ をマトロイドとよぶ.

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$,
2. 任意の相異なる $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と任意の $x \in B_1 \backslash B_2$ に対して, ある $y \in B_2 \backslash B_1$ が存在し，$(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ を満たす.

例えば、（体上もしくは斜体上の）ベクトル空間から有限個のベクトルを選んで E としたとき，E の部分集合のうち一次独立でありかつ極大であるものを集めて $\mathcal{B}$ とすると，$(E, \mathcal{B})$ はマトロイドとなる．また，グラフに対して辺集合を E とし，E の部分集合のうち全域森をなすようなものを集めて $\mathcal{B}$ とすると，$(E, \mathcal{B})$ はマトロイドとなる．

マトロイドには基族による公理系以外にも多様な公理系が存在し，それぞれの公理系が，グラフ・ベクトル空間・射影空間などといった様々な数学的な対象の離散的な性質を別側面から抽象化したものと捉えることができる．

グラフやマトロイドのような離散構造において，特定の性質を極小禁止マイナーを用いて特徴づけることは古くから多くの研究が行われてきた．性質 P に対する極小禁止マイナーとは，P を満たさないグラフ/マトロイドであって，一度マイナー操作を施すと性質 P を持つようなもののことをいう．

グラフにおけるマイナー操作とは以下の三つのことをいう：頂点の削除，辺の削除，辺の縮約．マトロイドにおけるマイナー操作については本稿では詳細は省略するが，グラフにおけるマイナー操作を自然に拡張したものである．

グラフにおける極小禁止マイナーによる特徴づけで特に有名なものに平面性に関する特徴づけがある．平面上に辺の交差なく描けるものを平面グラフというが，グラフが平面的であるという性質は，二つの極小禁止マイナー（完全グラフ K_5 および二部完全グラフ $K_{3,3}$）により完全に特徴づけられることが知られている．

さらに，平面性に対するような有限個の極小禁止マイナーによる特徴づけが，グラフの任意の minor-closed な性質（マイナー操作に関して閉じた性質）に対して可能であることが，Robertson と Seymour によって示された [7]．これにより，グラフにおいては任意の minor-closed な性質を持つか否かの判定が，有限個の極小禁止マイナーを含むかどうかを判定することに帰着されることになり，アルゴリズム理論においても極めて重要な結果であると言える．

一方，マトロイドにおいては，minor-closed な性質であっても有限個の極小禁止マイナーで特徴づけられるとは限らない．マトロイドにおける重要な性質に，表現可能性がある．マトロイドは，様々な幾何学的対象を統一的に扱うことができる一方で，その抽象性故に具体的な幾何学

1: 日本大学理工学部・教員・数学科

的な対象に対応しないようなマトロイドも多く存在する．どのようなマトロイドが幾何学的表現を持ちうるかという表現可能性・表現論の問題に関して，多くの研究がなされている．

マトロイドの表現可能性において，Rota の予想 [5] は分野の一大未解決問題であった．Rota の予想とは，”有限体上ベクトル空間の一次独立性により表現可能なマトロイドは有限個の禁止マイナーにより特徴づけられる”というものである．この予想は長年未解決であったが，2014 年に証明されたとのアナウンスがあった [6].

一方で，実数ベクトル空間をはじめとする無限体上ベクトル空間での表現可能性や，その拡張である向き付け可能性といった性質に関しては，極小禁止マイナーによる特徴づけは困難であることが知られている．

2. 主結果

先述の通り，無限体上ベクトル空間における表現可能性に対する極小禁止マイナーは無限個存在するため，極小禁止マイナーによる特徴づけは困難である．一方で，マトロイドは抽象度が高い構造であるため，より具体的な幾何構造を仮定した際に，その内側においては無限体での表現可能性の極小禁止マイナーによる特徴づけが可能となりうるかという自然な疑問がある．本研究では，向き付け可能マトロイドという順序体上ベクトル空間での表現を持つマトロイドや，有理数体の拡大体上で表現可能なマトロイドに着目し，それらの限定してさえ，無限体表現可能性を極小禁止マイナーで特徴づけることは困難であることを示した．

定理 2 ([2, 3]) $\mathbb{F}$ を標数 0 の体であるとする．向き付け可能マトロイドと $\mathbb{F}$ 上で表現可能マトロイドの積集合に対する階数 3 の極小禁止マイナーは無限個存在する．特に向き付け可能マトロイドの中に限っても無限個存在する．

定理 3 ([4]) x を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上代数的元で最小多項式の次数が 2 であるようなものとする．$\mathbb{Q}$ 表現可能マトロイドに対する階数 3 の極小禁止マイナーで $\mathbb{Q}[x]$ 表現可能であるものが無限個存在する．

3. 参考文献

[1] H. Whitney: On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics* 57, 1935, 509-533.

[2] H. Hiraishi, S. Moriyama: Minimal non-orientable matroids of rank three. *European Journal of Combinatorics* 50, 2015 , 123-137.

[3] H. Hiraishi, S. Moriyama: Excluded minors of rank 3 for orientability and representability. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*. 101-A(9), 2018, 1355-1362.

[4] H. Hiraishi, S. Moriyama: Excluded minors for $\mathbb{Q}$-representability in algebraic extension. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*. 102-A(9), 2019, 1017-1021.

[5] G.-C. Rota: Combinatorial theory, old and new. Proceedings of *International Congress of Mathematics*, 1970, 229-233.

[6] J. F. Geelen, A. M. H. Gerards, G. Whittle: Solving Rota’s conjecture. *Notices of the American Mathematical Society*, 2014, 736-743.

[7] N. Robertson, P.D. Seymour: Graph minors. XX. Wagner’s conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 92(2), 2004, 325-357.