P-9

代数多様体の Euclidean Distance Degree について
Euclidean Distance Degree of algebraic varieties

○芦沢成海 [1], 青柳美輝 [2]
Seikai Ashizawa, Miki Aoyagi

Abstract: In this paper, we introduce the Euclidean Distance Degree (ED degree) of algebraic varieties, for analyzing the complexity of fitting a variety, coming from a class of varieties, to a configuration of points in $\mathbb{R}^n$. The ED degree of a variety is defined by the number of critical points of the squared distance to a general point outside the variety, which mesures the algebraic complexity.

1. はじめに

本稿では，多項式最適化問題の代数的複雑性の指標である Euclidean Distance Degree (ED degree) を定義する．また，観測点の集合が得られた時，ある代数多様体のクラスから最適な多様体を選ぶ回帰問題に適用し，ED degree の観点からその複雑さについて考察する．

2. Euclidean Distance Degree (ED degree)

ED degree は，general point $p \in \mathbb{C}^n$ から多様体 $V \subseteq \mathbb{C}^n$ への 2 乗ユークリッド距離関数の臨界点の個数である．$\mathbb{R}^n$ 上に制限して考察した場合，実臨界点の個数は，与えられた距離関数の極小値，極大値，鞍点の個数となる．この値は，多項式最適化問題においての不変量となり，代数的複雑さを測る指標となる．

定義 1 $\mathbb{K}$ を体 $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．ユークリッド距離関数の 2 乗関数を

$$d_E(p,x) = \sum_{i=1}^{n}(p_i - x_i)^2 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$

と定義する．$I =< f_1, \cdots f_s > \subset \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ を実数係数多項式で定義されたイデアルとし，$X \subset \mathbb{C}^n$ をその対応する多様体とする．また，

$$I_{\mathrm{sing}} = I + < c \times c - \text{minors of } J(f) >$$

とおく．ここで，c は I の余次元で $J(f)$ は I のヤコビアン行列である．以下，I は 既約な根基イデアルとする．

I_{sing} に対応する X の特異点集合 X_{sing} の影響を除いて，臨界イデアルを次のように定義する．

$$\left(I + \left\langle (c+1)\times(c+1)\text{-minors } of \begin{pmatrix} p-x \\ J(f) \end{pmatrix} \right\rangle\right) : (I_{\mathrm{sing}})^{\infty} \tag{1}$$

補題 2 $p \in \mathbb{C}^n$ を *general point* とする．この時，臨界イデアルに対応する代数多様体は常に 0 次元であり，有限個の点からなる．すなわち，それらの点は，p から $X \setminus X_{\mathrm{sing}}$ への 2 乗ユークリッド距離関数の臨界点になる．

(証明) $x \in X \setminus X_{\mathrm{sing}}$ を固定する．ヤコビアン行列 $J(f)$ は，ランク c なので，$(c+1)\times(c+1)$-minors $of \begin{pmatrix} p-x \\ J(f) \end{pmatrix}$ の値が 0 になる x の集合は，$\mathbb{C}^n$ 上の次元 c となるアフィン線形部分空間になる．従って，式 (1) の値が 0 となる点 $(x,p) \in X \times \mathbb{C}^n$ の集合からなる多様体は既約であり，次元が n である．よって，2 番目の成分への射影 π を考えれば，general point $p \in \mathbb{C}^n$ の fiber $\pi^{-1}(p)$ は 0 次元，すなわち有限個の点からなることが分かる． (証明終わり)

定義 3 (Euclidean Distance Degree) $p \in \mathbb{C}^n$ を *general point* とする．臨界イデアルに対応する代数多様体の有限個の点の個数を EDdegree(X) とする．

例 4 (エッカート・ヤングの定理) $r \le n \le m$ を正の整数および $l = nm$ とする．X_r を rank が r 以下となる，$n \times m$ 行列全体の集合である行列多様体とする．この時，

$$\text{EDdegree}(X_r) = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる．

(証明) $n \times m$ の行列 U と特異値分解について考える．

$$P = T_1 \cdot \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_s) \cdot T_2$$

ここで $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_s$ は P の特異値，また，T_1 および T_2 は，それぞれ $n \times n$ 行列，$m \times m$ 行列の直交行列でである．このとき，エッカート・ヤングの定理により，

$$P^* = T_1 \cdot \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_r, 0, \cdots, 0) \cdot T_2$$

は，P に最も近いランク r の行列である．より一般に d_E の臨界点は

$$T_1 \cdot \mathrm{diag}(0, \cdots, 0, \sigma_{i_1}, 0, \cdots, 0, \sigma_{i_2}, \cdots, \sigma_{i_r}, 0, \cdots, 0) \cdot T_2.$$

1: 日大理工・院（前）・数学　2: 日大理工・教員・数学

ここで，$\{i_1, \cdots, i_r \mid i_1 < \cdots < i_r\}$ は $\{1, \cdots, s\}$ から r 個の要素を選んだものである．これは，n 個のうち r 個を選ぶ場合の数だけ存在するので，式 (2) が得られる．

(証明終わり)

このように，臨界超平面の場合は，エッカート・ヤングの特異値分解定理を用いて解析的に計算可能である．

定義 5 (最適化問題) 多項式 $f_\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ を考える．この多項式の係数は $\beta \in \mathbb{R}^k$ に関する多項式とする．また，$X_\beta \subseteq \mathbb{R}^n$ を多項式 f_β の生成するイデアルに対応する多様体とする．f_β は，$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ 上の多様体の集合を定義している．$p_i \in \mathbb{R}^n (i = 1, \cdots, m)$, $p = (p_1, \cdots, p_m) \in \mathbb{R}^{mn}$ とする．最適化問題の目的は，与えられたデータ p に対して，最適な β を求めることである．すなわち，次の式で表される．

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{mn}} \sum_{i=1}^{m} d_E(x_i, p_i) \tag{3}$$

$$s.t.\ \exists \beta \in \mathbb{R}^k\ s.t.\ 1 \leq \forall i \leq m, f_\beta(x_i) = 0$$

この最適化問題は，$f_\beta(x_i) = 0$ を満たす，p に最も近い $x \in \mathbb{R}^{mn}$ が存在する多様体 V_β を決定する問題ともいえる．例 4 では，f_β は超平面の集合である．EDdegree はデータの個数 m に依存しない．しかし一般には m に依存する値である．

定義 6

$$C_{m,n} := \{(x, \beta) \in \mathbb{C}^{mn} \times \mathbb{C}^k \mid f_\beta(x_i) = 0, 1 \leq i \leq m\}$$

を *incidence* 多様体，その多様体 $C_{m,n}$ の自然な射影 $\pi : \mathbb{C}^{mn+k} \to \mathbb{C}^{mn}$ による像の代数的閉包を $H_{m,n}$ とし，*hypothesis* 多様体とよぶ．

$H_{m,n}$ の general point $x = (x_1, \cdots, x_m)$ は，ある $\beta \in \mathbb{C}^k$ が存在して，任意の x_i に対して，$f_\beta(x_i) = 0$ が成立する．

定義 5 において点 p が式 (3) の値を 0 にするならば，明らかに $p \in H_{m,n}$ である．上記の定義から $H_{m,n}$ は $\mathbb{C}^{mn}$ 上で定義 5 の代数的閉包である．定義 5 の最適解を見つけるための代数的複雑性は，その解が定められた多項式に依存する．

定義 7 βEDdegree$(C_{m,n})$ を，射影 π によって $\mathbb{C}^{mn+k}$ に引き戻した $\mathbb{C}^{mn}$ 上での距離を用いて，$C_{m,n}$ の EDdegree を定義する．すなわち，$a, b \in \mathbb{C}^{mn+k}$ 間での距離を $d_E(\pi(a), \pi(b))$ で与える．従って，$a \neq b$ でも $d_E(\pi(a), \pi(b)) = 0$ になることもあり，この引き戻し距離は擬距離である．$p \in \mathbb{C}^{mn}$ に対して，臨界イデアルは次のように定義される．

$$\left(I_{C_{m,n}} + \left\langle (c{+}1){\times}(c{+}1)\text{-minors}\ of \begin{pmatrix} (p,0) - (x,0) \\ J(C_{mn}) \end{pmatrix} \right\rangle \right)$$

$$: ((I_{C_{m,n}})_{sing})^\infty$$

ここで，c は $\mathbb{C}^{mn+k}$ 上での $C_{m,n}$ の余次元，$I_{C_{m,n}}$ は定義 6 で与えられた $C_{m,n}$ を決定する方程式によって生成されるイデアルである．また，$J(C_{m,n})$ は $I_{C_{m,n}}$ のヤコビアン行列である．

一般に $\beta EDdegree(C_{m,n})$ は $EDdegree(H_{m,n})$ と等しくはならない．例えば次の例がある．

例 8 $m = 3, n = 2$ とする．すなわち，$\mathbb{C}^2$ 上に *3* 点が与えられたとする．$f_\beta = (x_1 - \beta_1)^2 + (x_2 - \beta_2)^2 - \beta_3$，$\beta \in \mathbb{C}^3$ とおく．このとき，*3* 点を通る円はただ一つしか存在しないので，$H_{3,2} = \mathbb{C}^6$ であり $EDdegree(H_{3,2}) = 1$ である．一方 $\beta EDdegree(C_{3,2}) = 4$ である．3 点を通る円と，次の図のような *3* つの円が対応する．

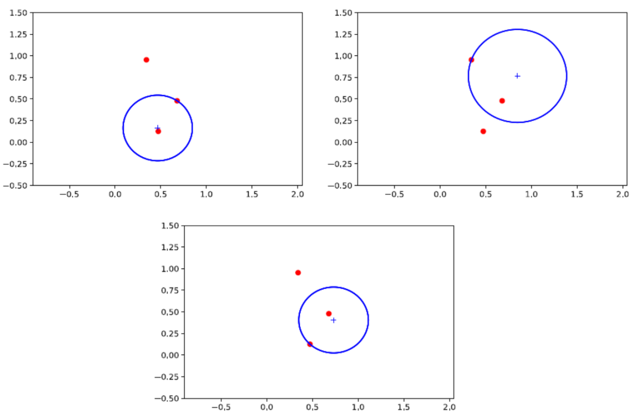

図 1: βEDdegree$(C_{3,2})$ に対応する 3 つの円 [1]

次の定理が成り立つ．この定理は βEDdegree$(C_{m,n})$ が EDdegree$(H_{m,n})$ の上界であることを示している．実際，$H_{m,n}$ の臨界点が $C_{m,n}$ の臨界点の部分集合になる．

定理 9

$$\text{EDdegree}(H_{m,n}) \leq \beta\text{EDdegree}(C_{m,n})$$

3. 参考文献

[1] Oliver Gäfvert:"Computational complexity of learning algebraic varieties," Advances in Applied Mathematics, Elsevier, vol.121, p.1–26 (2020)

https://doi.org/10.1016/j.aam.2020.102100

[2] Jan Draisma, Emil Horobet¸, Giorgio Ottaviani, Bernd Sturmfels and Rekha R. Thomas:" The Euclidean Distance Degree of an Algebraic Variety ", Foundations of Computational Mathematics, Springer, vol.16, p.99–149 (2016)