P-12

微分方程式の解の長時間挙動とŁojasiewicz-Simon 不等式

Long-time behavior for solutions of differential equations and the Łojasiewicz-Simon inequality

○﨑山 歩実 [1]
*Ayumi SAKIYAMA[1]

Abstract: The Łojasiewicz-Simon inequality is one of the helpful inequalities for studying long-time behavior for solutions of differential equations. In the first section, we introduce the Łojasiewicz-Simon inequality in finite-dimensional linear spaces and explain how to use the inequality to analyze long-time behavior. The second section presents the Łojasiewicz-Simon inequality on infinite dimensional linear spaces and its assumptions. Finally, we show the Łojasiewicz-Simon inequality on the infinite dimensional linear spaces.

1. 微分方程式とŁojasiewicz-Simon 不等式

$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^1 級とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\dot{\Phi}(u(t)), \quad t > 0. \tag{1}$$

ここで, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は未知関数, $\dot{\Phi}$ は Φ の導関数とする. $\overline{u} \in \mathbb{R}$ で Φ が極小となるとき, $0 < \theta \leq 1$ に対し

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dt}(\Phi(u(t)) - \Phi(\overline{u}))^{\theta} \\ &= \theta(\Phi(u(t)) - \Phi(\overline{u}))^{\theta-1}\left|\dot{\Phi}(u(t))\right|\left|\frac{d}{dt}u(t)\right| \end{aligned}$$

が得られる. ここで, 次のŁojasiewicz-Simon 不等式を考える.

仮定 1 (Łojasiewicz-Simon 不等式)**.** $0 < \theta \leq \dfrac{1}{2}$, $D > 0$, $\delta > 0$ が存在し, 任意の $u \in \mathbb{R}$ に対し, $|u - \overline{u}| < \delta$ ならば

$$|\dot{\Phi}(u)| \geq D|\Phi(u) - \Phi(\overline{u})|^{1-\theta} \tag{2}$$

を満たす.

Łojasiewicz-Simon 不等式が成り立つとき, $t > 0$ に対し, $|u(t) - \overline{u}| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dt}(\Phi(u(t)) - \Phi(\overline{u}))^{\theta} \\ &= \theta(\Phi(u(t)) - \Phi(\overline{u}))^{\theta-1}\left|\dot{\Phi}(u(t))\right|\left|\frac{d}{dt}u(t)\right| \\ &\geq D\theta\left|\frac{d}{dt}u(t)\right| \end{aligned}$$

となるから, 両辺を $0 < t < s$ で積分すると

$$(\Phi(u(t)) - \Phi(\overline{u}))^{\theta} \geq D\theta|u(s) - u(t)| \tag{3}$$

が得られる.

この不等式 (3) は, $\Phi(u(t))$ の評価が (1) の解の評価を導くという観点から重要である [2]. Φ が $\overline{u}$ において解析的であるとき, (2) が成り立つことが知られている [1, Theorem 1.20]. 本稿では, 無限次元空間におけるŁojasiewicz-Simon 不等式の導出を [1] に従って紹介する.

2. 無限次元空間におけるŁojasiewicz-Simon 不等式

X を内積 $(\cdot,\cdot)_X$ が定義されている実ヒルベルト空間とする. $\Phi : X \to \mathbb{R}$ を C^1 級とする. すなわち, 任意の $u \in X$ に対し, $\dot{\Phi}(u) \in X$ が存在して, X の意味で $h \to 0$ のとき

$$\Phi(u + h) - \Phi(u) - (\dot{\Phi}(u), h)_X = o(||h||_X)$$

を満たし, $u \to \dot{\Phi}(u)$ は X 上連続であるとする.

$\overline{u} \in X$ を Φ の臨界点とする. つまり $\dot{\Phi}(\overline{u}) = 0$ とする. そして, $\dot{\Phi} : X \to X$ は $\overline{u}$ でガトー微分可能, すなわち, 任意の $h \in X$ に対し,

$$\dot{\Phi}(\overline{u} + \theta h) = \dot{\Phi}(\overline{u}) + \theta Lh + o(|\theta|), \quad (\theta \to 0)$$

を仮定する. また, ガトー微分 L は, 有界線形作用素のみならず, X 上のフレドホルム作用素, すなわち, L の X への像 $\mathscr{R}(L) = L(X)$ は閉で,

$$\dim(\mathscr{K}(L)),\ \mathrm{codim}(\mathscr{R}(L)) < \infty$$

を仮定する. ただし, $\mathscr{K}(L)$ は L の核とする.

次に, X の線形部分空間で, 以下の 5 条件を満たす実バナッハ空間 Y が存在することを仮定する. フレッシェ微分については, [3] を参照.

(Y1) Y は稠密で X への埋め込みが連続

(Y2) $\overline{u} \in Y$

(Y3) $L^{-1}(Y) \subset Y$

(Y4) $\dot{\Phi}(Y) \subset Y$

(Y5) $\dot{\Phi} : Y \to Y$ は Y 上連続フレッシェ微分可能

X から $\mathscr{K}(L)$ への直交射影を P とする. 臨界多様体 S を次で定義する.

$$S = \{u \in Y : \dot{\Phi}(u) \in \mathscr{K}(L)\} \tag{4}$$

このとき, 次が成り立つ.

1: 日大理工・院 (前)・数学

命題 2. 次を満たす $\overline{u} \in Y$ の開近傍 $U_0 \times U_1$ と, 写像 $g : U_0 \to U_1$ が存在する. U_0 は $P\overline{u} \in \mathscr{K}(L)$ の開近傍, U_1 は $(I-P)\overline{u} \in L(Y)$ の開近傍であり, S は

$$S \cap (U_0 \times U_1) = \{(u_0, g(u_0)); u_0 \in U_0\}$$

と書ける. g は連続フレッシェ微分可能であり

$$g(P\overline{u}) = (I-P)\overline{u}$$

を満たす.

$N = \dim \mathscr{K}(L)$ とし, $v_1, v_2, \ldots, v_N$ を $\mathscr{K}(L)$ の基底とすると, 対応

$$\mathscr{K}(L) \ni u_0 = \sum_{k=1}^{N} \xi_k v_k \leftrightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$$

により, $\mathscr{K}(L)$ と $\mathbb{R}^N$ を同一視することができる. このとき, 次の仮定をおく.

仮定 3. $P\overline{u} = \overline{\xi}$ とする. $\overline{\xi}$ の開近傍 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ が存在し

$$\Omega \ni \xi \mapsto \phi(\xi) \equiv \Phi\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k v_k + g\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k v_k\right)\right)$$

は $\overline{\xi}$ の近傍上解析的である.

上記の仮定のもとで, 無限次元空間におけるŁojasiewicz-Simon 不等式を述べる.

定理 4. $\Phi : X \to \mathbb{R}$ を C^1 級とし, $\overline{u} \in X$ を臨界点とする. $\dot{\Phi}$ を $\overline{u}$ でガトー微分可能で, そのガトー微分 L はフレドホルム作用素であるとする. また, (Y1)-(Y5) を満たすバナッハ空間 Y が存在すると仮定する. 臨界多様体 S を (4) として定義し, 仮定 3 は成り立つとする. このとき, $\overline{u} \in Y$ の近傍 U, 正定数 $D > 0$, $0 < \theta \le \frac{1}{2}$ が存在して, 任意の $u \in U$ に対して

$$||\dot{\Phi}(u)||_Y \ge D|\Phi(u) - \Phi(\overline{u})|^{1-\theta}, \tag{5}$$

を満たす.

現在, [4] で提唱された偏微分方程式の長時間挙動の解析に, 定理 4 の無限次元空間におけるŁojasiewicz-Simon 不等式を適用できないかを考察している.

3. 定理 4 の証明の概略

U を $\overline{u}$ の十分小さな近傍とする. $u \in U$ に対し

$$\begin{aligned} u &= (Pu + g(Pu)) + ((I-P)u - g(Pu)) \\ &\equiv u_S + u_1 \in S + L(Y), \end{aligned} \tag{6}$$

と表せる. このとき, $u \to \overline{u}$ のとき

$$u_S \to \overline{u},\ u_1 \to 0 \tag{7}$$

が得られる. さらに次の命題が成り立つ.

命題 5. $\overline{u} \in Y$ の十分小さな近傍 U と正定数 $c > 0$ が存在して, 任意の $u \in U$ に対して

$$||P\dot{\Phi}(u)||_Y \ge ||\dot{\Phi}(u_S)||_Y - o(1)||u_1||_Y, \tag{8}$$

$$||(I-P)\dot{\Phi}(u)||_Y \ge c||u_1||_Y, \tag{9}$$

が成り立つ. $o(1)$ は, $u \to \overline{u}$ のときに 0 に収束する数である.

(8) と (9) を組み合わせると, $c_1 > 0$ が存在して

$$||\dot{\Phi}(u)||_Y \ge c_1\{||\dot{\Phi}(u_S)||_Y + ||u_1||_Y\}, \tag{10}$$

が成り立つ.

(6) での分解を用いて, $u = u_S + u_1$ に対し

$$|\Phi(u) - \Phi(\overline{u})| \le |\Phi(u) - \Phi(u_S)| + |\Phi(u_S) - \Phi(\overline{u})| \tag{11}$$

により $|\Phi(u) - \Phi(\overline{u})|$ を評価する. (Y5) と (10) より

$$||\dot{\Phi}(u)||_Y \ge c_2|\Phi(u) - \Phi(u_S)|^{\frac{1}{2}}, \quad u \in U \tag{12}$$

を得る.

また仮定 3 より, $\xi \in \Omega$ に対し, 有限次元における Łojasiewicz-Simon 不等式

$$||\nabla_\xi \phi(\xi)||_{\mathbb{R}^N} \ge c_3|\phi(\xi) - \phi(\overline{\xi})|^{1-\theta}$$

が成り立つ [1, Theorem 1.20]. $\phi(\xi) = \Phi(u_S)$ となるように $\xi \in \Omega$ をとると, $\phi(\overline{\xi}) = \Phi(\overline{u})$ なので

$$||\dot{\Phi}(u)||_Y \ge c_3|\Phi(u_S) - \Phi(\overline{u})|^{1-\theta} \tag{13}$$

となる.

$$0 < \theta \le \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < \frac{1}{1-\theta} \le 2$$

なので, (12) と (13) を (11) に代入すると, $\dot{\Phi}(\overline{u}) = 0$ より, 必要なら U をさらに小さくとることにより

$$\begin{aligned} |\Phi(u) - \Phi(\overline{u})| &\le \frac{1}{c_2^2}||\dot{\Phi}(u)||_Y^2 + \frac{1}{c_3^{1-\theta}}||\dot{\Phi}(u)||_Y^{\frac{1}{1-\theta}} \\ &\le D||\dot{\Phi}(u)||_Y^{\frac{1}{1-\theta}} \end{aligned}$$

となり, (5) が得られる.

4. 参考文献

[1] Atsushi Yagi, "Abstract parabolic evolution equations and Łojasiewicz-Simon inequality I," Springer, 2021.

[2] 八木厚志, 放物型発展方程式とŁojasiewicz-Simon 評価式, 第四回偏微分方程式レクチャーシリーズ, 2015.

[3] 谷島賢二, 数理物理入門, 東京大学出版会, 2018.

[4] Masashi Mizuno, Keisuke Takasao, "A curve shortening equation with time-dependent mobility related to grain boundary motions," Interfaces Free Bound. **23** (2021), 169–190.