P-13

円周上の熱方程式の初期値問題
The initial value problem of the heat equation on the circumference

○金子歩夢 [1]
*Ayumu Kaneko[1]

Abstract: In this article, we first define a function called the heat karnel and prove its several properties.Then we prove that the convolution of the heat karnel and an initial value gives the unique solution to the initial value problem of the heat equation on the circumference.

1. Fourier 級数と Fourier 係数

円周 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は長さ 1 の区間と同一視する.

関数 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ に対して, 積分

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-2\pi int}\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}\,dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{1}$$

が存在するとき，c_n を f の Fourier 係数といい, 形式的に

$$f(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi int} \tag{2}$$

と表して，これを関数 f の Fourier 展開という．また，この右辺の形の級数を Fourier 級数という.

以下，関数 f の Fourier 係数 を $c_n = \hat{f}(n)$ と書き, 簡単のため $e_n(x) = e^{2\pi inx}$ と書く.

2. 円周上の熱方程式の初期値問題

等式

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)e_n(x) \tag{3}$$

が成り立つことを形式的に認める. $u(t,x)$ が円周 $0 \leqq x \leqq 1$ 上の熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t > 0,\ 0 \leqq x \leqq 1) \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{4}$$

の解であるとき, 積分と微分の順序交換が可能であるとすると，$dc_n/dt = -2\pi^2 n^2 c_n$ となり $c_n(0) = \hat{f}(n)$ より

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\exp(-2\pi^2 n^2 t)e_n(x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} f(y)\exp(-2\pi^2 n^2 t)e_n(x)\overline{e_n(y)}\,dy. \end{aligned}$$

ここで, $e_n(x)\overline{e_n(y)} = e_n(x-y)$ だから

$$p(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-2\pi^2 n^2 t)e_n(x) \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{T}) \tag{5}$$

とおくと, 解 $u(t,x)$ は

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{T}} p(t,x-y)f(y)\,dy \tag{6}$$

つまり

$$u(t,\cdot) = p(t,\cdot) * f \tag{7}$$

で与えられることが予想される.

(5) で定義される関数 $p(t,x)$ を (4) に対する熱核または熱方程式の基本解, 素解という.

補題 1 *(5) で定義される関数 $p(t,x)$ は以下を満たす.*

1. $p \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{T})$
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} p(t,x)\,dx = 1 \qquad (t > 0)$

[証明]

1. 任意の $t_0 > 0$ について $(t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{T}$ のとき (5) の右辺の各項の絶対値は

$$\begin{aligned} \left|\exp(-2\pi^2 n^2 t)e_n(x)\right| &= \exp(-2\pi^2 n^2 t) \\ &\leqq \exp(-2\pi^2 n^2 t_0) \\ &\leqq \exp(-2\pi^2 |n| t_0) \end{aligned}$$

と評価され, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \exp(-2\pi^2|n|t_0) < \infty$ だから Weierstrass の M 判定法より, (5) の右辺は $[t_0,\infty) \times \mathbb{T}$ において一様収束する．したがって $p \in C((0,\infty) \times \mathbb{T})$. さらに $k, m \geqq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m (\exp(-2\pi^2 n^2 t)e_n(x))\right| \\ &= \left|\left(-2n^2\pi^2\right)^k (2\pi in)^m \exp(-2n^2\pi^2 t)e_n(x)\right| \\ &\leqq (2\pi^2)^k (2\pi)^m |n|^{2k+m} \exp(-2n^2\pi^2 t) \end{aligned}$$

であり, この右辺の $n \in \mathbb{Z}$ にわたる級数も収束するので，Weierstrass の M 判定法により, 項別微分した級数も $[t_0,\infty)\times\mathbb{T}$ において一様収束する. よって $p \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{T})$.

2. については (5) の右辺を項別積分すると得られる.

(4) の第 2 式に関連して次のことが言える.

1: 日大理工・院 (前)・数学

補題 2 $f \in C(\mathbb{T})$ に対し, $\|f\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|$ とする.
$f \in C^2(\mathbb{T})$ のとき, u を (7) で定めると,

$$\|u(t,\cdot) - f\|_\infty \to 0 \quad (t \to 0) \tag{8}$$

また, 次に行う証明に用いるために, 近似を保証する評価についての補題を準備する.

補題 3 任意の $f \in C(\mathbb{T})$ に対して, $t > 0$ のとき,

$$\|p(t,\cdot) * f\|_\infty \leqq \|f\|_\infty \tag{9}$$

[証明]
(9) を示すために, 熱核 $p(t,x)$ の次の性質を用いる.

1. 任意の $t > 0, x \in \mathbb{T}$ に対して, $p(t,x) > 0$
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} p(t,x)\,dx = 1$

1. 2. を用いれば

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}} p(t,x-y)f(y)\,dy\right| &\leqq \int_{\mathbb{T}} p(t,x-y)|f(y)|\,dy \\ &\leqq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{T}} p(t,x-y)\,dy \\ &= \|f\|_\infty\end{aligned}$$

2. については証明済みのため, 1. を証明する. そのために一度次の補題を認める.

補題 4 正値保存性
u を $[0,\infty)\times\mathbb{T}$ の熱方程式の解とすると,

$$f = \lim_{t\to 0} u(t,\cdot) \geqq 0 \Rightarrow u(t,x) \geqq 0 \tag{10}$$

[1. の証明]
$p(t_0,x_0) < 0$ となる $t_0 > 0, x_0 > 0$ が存在すれば, $f \in C(\mathbb{T})$ を, $f(x_0) = 1$, $0 \leqq f \leqq 1$, かつ, $\{x | \, p(t_0,x) < 0\}$ の外で $f = 0$ となるように選べる. このとき, $u(t_0,\cdot) = p(t_0,\cdot) * f < 0$ となり, (10) に矛盾する.
[補題 4 の証明] と背理法を用いる. $u(t_0,x_0) < 0$ となる $t_0 > 0, x_0 \in \mathbb{T}$ が存在すると仮定する. このとき $\alpha > 0$ として,

$$v(t,x) = e^{-\alpha t}u(t,x)$$

を考えると, $v(+0,x) = f(x) \geqq 0$ で, $v(t_0,x_0) < 0$. そこで, $(0,t_0]\times\mathbb{T}$ での v の最小点を (t_1,x_1) とすると,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_1,x_1) \leqq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_1,x_1) \geqq 0, \quad v(t_1,x_1) < 0.$$

よって,

$$\begin{aligned}0 \geqq \frac{\partial v}{\partial t}(t_1,x_1) &= e^{-\alpha t_1}\frac{\partial u}{\partial t}(t_1,x_1) - \alpha e^{-\alpha t}u(t_1,x_1) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\alpha t_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_1,x_1) - \alpha v(t_1,x_1) \\ &\geqq -\alpha v(t_1,x_1) > 0.\end{aligned}$$

これは矛盾であるから補題 4 が成り立つ.
以上の結果より, 形式的に求めた (7) で表される解は次の意味で正当化できる.

定理 5 $f \in C(\mathbb{T})$ のとき, 初期値問題

1. $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t > 0,\ 0 \leqq x \leqq 1)$
2. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\|u - f\|_\infty = \lim_{t\to 0}\max_x |u(t,x) - f(x)| = 0$
3. $u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{T})$

の解 u はただ一つで, (7) で与えられる.

[証明] まず, $f \in C^2(\mathbb{T})$ のとき, $u = p * f$ は補題 1 より 3. を, また補題 2 より, 2. をみたす. (5) の右辺の各項は熱方程式の解だから, u は 1. をみたす.
一般の $f \in C(\mathbb{T})$ についても, $u = p * f$ は 1. 3. をみたす.
2. を $f_n \in C^2(\mathbb{T})$ による近似で証明する. $f_n \in C^2(\mathbb{T})$ を $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ となるように選び $\varepsilon > 0$ とする. このとき, ある $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$$

が成り立つ. また補題 2 よりある $\delta > 0$ が存在し $0 < t < \delta$ ならば

$$\|p(t,\cdot) * f_n - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ. よって補題 3 より,

$$\begin{aligned}&\|p(t,\cdot) * f - f\|_\infty \\ &\leqq \|p(t,\cdot) * (f - f_n)\|_\infty + \|p(t,\cdot) * f_n - f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \\ &\leqq 2\|f - f_n\|_\infty + \|p(t,\cdot) * f_n - f_n\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (0 < t < \delta).\end{aligned}$$

ゆえに, $\|p(t,\cdot) * f - f\|_\infty \to 0 \quad (t \to 0)$.
一意性については本稿では触れないが, 有界閉区間上の周期境界条件を満たす初期値に対する熱方程式の解は一意的であることが知られている.

3. 参考文献

[1] 高橋陽一郎. 実関数とフーリエ解析. 岩波書店 (2006)