P-16

実数の超越性と関数の連分数展開

Transcendence proof of Napier's constant and functional continued fraction expansions

○杉本和希
*Kazuki Sugimoto

Abstract: In this paper, we illustrate a typical proof of the transcendence of Napier's constant e, based on the identity of Ch. Hermite. We also briefly explain how they are related, the transcendence or the irrationality proof and Padé approximation: an approximation being regarded as a functional analogy of continued fraction expansions.

1. はじめに

本稿では実数の連分数展開に関する知見を要約し，また Napier 数 e が超越数であることを示した Ch. Hermite の証明を紹介する．その上で，連分数展開の関数版とみなすことの可能な Padé 近似の命題を述べ，指数関数の 0 以外の代数的数における値の超越性の証明との類似点を述べる．

2. 連分数とは

定義 (正則連分数)**.**
$\omega \in \mathbb{R}$ とする. 正の整数の列 $a_0, a_1, \cdots$ を用いて

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}$$

または $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, \ldots]$

と表されるものを**連分数展開**といい, 分子が 1 となる実数の表記を，**正則連分数**と言う．

連分数展開とは正則連分数による表示を考えるものとする．$\omega < 0$ の場合は，$a_0 \le 0$，$0 \le a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ とすれば良い．$\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ と ω の連分数展開が無限に続くことは同値であることも知られている [1].

3. 近似分数と部分商

まず次の命題を述べる．

命題 3.1 (n 次近似分数 · 部分商)**.**

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = a_1 a_0 + 1 \\ q_1 = a_1, \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

とおくと $\frac{p_n}{q_n}$ は連分数展開を n 項で止めた有理数に等しいことが分かる．即ち $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]$ である．

この $\frac{p_n}{q_n}$ を n **次近似分数**，各 a_n を **部分商**という. 近似分数 $\frac{p_n}{q_n}$ に対し $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ が成り立つ.

特に p_n, p_{n-1} 及び q_n, q_{n-1} は互いに素である．これらは連分数の一般論 [1][2][3] より従う.

4. Napier 数 e の超越性の証明

本節では e の超越性の Hermite による証明を紹介する．

補題 4.1. $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ のとき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対する k 次導関数 $g^{(k)}(x)$ の係数は，全て $k!$ で割り切れる．

補題 4.2. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ の次数を ν とし,$x \in \mathbb{R}$ とする. また,

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(\nu)}(x) \tag{1}$$

とおく. このとき,

$$e^x \int_0^x f(t) e^{-t} dt = F(0)e^x - F(x) \tag{2}$$

が成立する. この式を **Hermite の恒等式**という.

定理 4.1. (Hermite)
e は超越数である．

Proof. 背理法で示す. e が m 次の代数的数であると仮定すると $a_m \neq 0, a_k \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, \cdots, m$ に対し

$$a_m e^m + \cdots + a_1 e + a_0 = 0 \tag{3}$$

が成立する. 式 (3) において, $x = k$ $(k = 0, 1, \cdots, m)$ とおくと，次が得られる．

$$F(0)e^k - F(k) = e^k \int_0^k f(t) e^{-t} dt, (k = 0, 1, \cdots, m). \tag{4}$$

式 (4) の両辺に a_k を乗じて $0 \le k \le m$ を代入した後，順次加えて式 (3) を用いると次式を得る．

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} a_k e^k F(0) - \sum_{k=0}^{m} a_k F(k) &= \sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t) e^{-t} dt \\ \therefore -\sum_{k=0}^{m} a_k F(k) &= \sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t) e^{-t} dt. \end{aligned} \tag{5}$$

日大理工・院 (前)・数学

ここで十分大きな自然数 n に対し，次の式を $f(x)$ とする．

$$f(x) := \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}(x-1)^n \cdots (x-m)^n. \tag{6}$$

式 (6) における多項式 $f(x)$ は重複度 $n-1$ である 0 と重複度 n である $1, \cdots, m$ を根にもつ. したがって

$$f^{(\ell)}(0) = 0 \ (\ell = 0, 1, \cdots, n-2), \tag{7}$$

$$f^{(n-1)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n, \tag{8}$$

$$f^{(\ell)}(k) = 0 \ (\ell = 0, 1, \cdots, n-1; k = 1, \cdots, m). \tag{9}$$

補題 4.1 より $x^{n-1}(x-1)^n \cdots (x-m)^n$ の ℓ 次導関数の係数は $\ell!$ で割り切れる. これは $\ell \geq n$ において $f^{(\ell)}(x)$ の係数は n で割り切れることを示している. したがって式 (1), 式 (7) と式 (8) から次の式

$$F(0) = \sum_{\ell=n-1}^{(m+1)n-1} f^{(\ell)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n + nA \ (\exists A \in \mathbb{Z}) \tag{10}$$

が得られる．式 (9) より

$$F(k) = \sum_{\ell=n}^{(m+1)n-1} f^{(\ell)}(k) = nB_k \ (\exists B_k \in \mathbb{Z}, k = 1, \cdots, m) \tag{11}$$

が成り立つこともわかる.
今 n を次の条件を満たす整数とする.

$$(n, m!) = 1, \ n > |a_0|. \tag{12}$$

式 (10) と式 (11) より，式 (5) の左辺における項は全て整数である．条件 (3) と式 (12) をあわせると式 (10) は $a_0F(0)$ が n で割り切れないことを意味している．一方，式 (11) より $a_kF(k)$ はすべて n で割り切れる. したがって式 (5) は 0 でない整数である. 特に次が得られる.

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k F(k)\right| \geq 1. \tag{13}$$

今, 式 (5) の右辺を上から評価しよう. まず

$$|f(x)| \leq \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!} \ (0 \leq x \leq m),$$

となるので，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{m} a_k \int_0^k f(t)e^{k-t}dt\right| &\leq \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{m}|a_k|\int_0^k e^{k-t}dt \\ &\leq \frac{m^{(m+1)n}}{(n-1)!}e^m\sum_{k=0}^{m}|a_k| = \frac{C_0 \cdot C^n}{(n-1)!}\end{aligned} \tag{14}$$

である (C_0 と C は n によらない定数).
式 (5)(13)(14) 及び Stirling の公式から，次の不等式

$$1 \leq \left|\sum_{k=0}^{m} a_k F(k)\right| < \frac{C_0 C^n}{(n-1)!}$$

を得る. 右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束するので，n が十分大きいとき 右辺 < 1 となる. したがって矛盾する．　□

5. 関数版の連分数展開

連分数と超越性の証明を関係づける結果として, 次の定理 [4] を例として挙げる．これは関数 $\exp(z)$ の 0 ではない代数的数での値の超越性を示す Padé 近似の近似多項式の構成例になっている．Hermite が e の超越性を，連分数展開の関数体における類似，つまり Padé 近似により導出しようとした方針を示すものである.

定理 5.1 (Hermite)**.** 任意の整数 $n \geq 0$ に対して, 次を満たす多項式 $P_n(z), Q_n(z)$ の組が，一意的に存在する.

$$\begin{aligned}&R_n(z) = Q_n(z)e^z + P_n(z) = c_0 z^{2n+1} + \cdots, \\ &c_0 = \frac{1}{(n+1)\cdots(2n+1)}.\end{aligned} \tag{15}$$

ただし多項式 $P_n(z)$ と $Q_n(z)$ は以下で定められる.

$$P_n(z) = (-1 + \frac{d}{dz})^{-n-1}z^n, \tag{16}$$

$$Q_n(z) = (1 + \frac{d}{dz})^{-n-1}z^n. \tag{17}$$

そして $R_n(z)$ は積分

$$R_n(z) = \frac{z^{2n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n e^{tz}dt \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{18}$$

により表される．この $R_n(z)$ は Padé 近似の剰余項というものを与える関数になっている.

$\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ は，超越関数 e^z の連分数展開の第 1 項目の近似分数の位置にあると見ることができる.

上記の定理の証明は本稿では省くが，関数 $\exp(z)$ に対する代数的数 $z \neq 0$ における値の超越性の証明，特に e の超越性の証明に，Hermite が Padé 近似を用いようとしていた点に注目して，今後の研究課題としたい.

6. 参考文献

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, First edition 1938, 6th edition 2008, Oxford University Press.

[2] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, First Russian edition 1935, Univ. Chicago 1964, Dover reprint 1997.

[3] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes Math., **785**, Springer, 1980.

[4] A. B. Shidlovskii, Transcendantal Numbers, First Russian edition 1987, de Gruyter Stud. Math., **12**, Walter de Gruyter, 1989.