P-9

4 次元多様体上の Yang-Mills 接続
Yang-Mills Connections over four-manifolds

○斉藤 璃空 [1]
*Riku Saito [1]

Abstract: We solve the variational problem of a Yang-Mills functional and discuss the conditions for Yang-Mills connections. In especially, we investigate the minimum value of Yang-Mills functional over an oriented compact Riemannian four-manifold.

1. 序

主束の接続全体の空間の上に Yang-Mills 汎関数が定義される．この Yang-Mills 汎関数の変分問題において，臨界点となる接続を Yang-Mills 接続とよぶ．また，4 次元 Riemann 多様体上の Yang-Mills 汎関数は，主束により決まる不変量で下からおさえられる．自己双対接続，あるいは反自己双対接続のとき，Yang-Mills 汎関数は最小値をとる．したがって（反）自己双対接続は Yang-Mills 接続である．本講演では以上の事柄について言及する．

2. Yang-Mills 接続

まず，Yang-Mills 汎関数を定義しよう．M を向きのついた n 次元コンパクト Riemann 多様体とする．M 上の主 G 束 P を一つ固定し，構造群 G はコンパクトな Lie 群とする．また，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の随伴表現 Ad により P の同伴ベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ がえられる．主 G 束 P の接続は，$\mathfrak{g}$ に値をもつ P 上の 1 形式 ω で

$$\begin{aligned} {R_a}^*\omega &= a^{-1}\omega a, & a \in G \\ \omega(A^*) &= A, & A \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

をみたすものとして定義する．A^* は基本ベクトル場である．また，R_a は G の元 a による P 上の右移動である．$\mathscr{C}(P)$ を P の接続全体とすると，$\mathscr{C}(P)$ はアフィン空間になる．接続 $\omega \in \mathscr{C}(P)$ の曲率 Ω を $\Omega = d\omega + \omega\wedge\omega$ で定義する．ただし，簡単のため G は行列群とする．したがって，Ω は P 上の $\mathfrak{g}$ に値をもつ 2 形式 $\Omega \in A^2(P;\mathfrak{g})$ である．さらに M 上の $P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ に値をもつ 2 形式 $\Omega \in A^2(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ とみなすこともできる．いま G がコンパクトなので，$\mathfrak{g}$ 上の $Ad\,G$ 不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ が存在する．これは各点 $x \in M$ において，$P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ のファイバー $P_x\times_{Ad}\mathfrak{g}$ に内積を定める．一方，M の Riemann 計量は外積空間 $\bigwedge {T_x}^*M$ に内積を与える．したがって，$\bigwedge {T_x}^*M \otimes P_x \times_{Ad}\mathfrak{g}$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が定まる．これを M 上で積分することで $A^*(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ に内積 $(\ ,\ )$ が定義される．

定義 1. $*1$ を M の体積要素として，$J : \mathscr{C}(P) \to \mathbb{R}$ を

$$J(\omega) = \frac{1}{2}\int_M \langle\Omega,\Omega\rangle * 1$$

で定義する．$J(\omega)$ を Yang-Mills 汎関数とよぶ．

なお，$*$ は Hodge の $*$ 作用素 $\bigwedge^p T^*M \to \bigwedge^{n-p} T^*M$ である．つぎに Yang-Mills 汎関数の臨界点を調べよう．接続全体 $\mathscr{C}(P)$ はアフィン空間になるので，

$$\omega_t = \omega + t\alpha, \qquad t \in \mathbb{R}$$

の形の直線に沿って変分を考える．ω_t の曲率 Ω_t は

$$\begin{aligned} \Omega_t &= d\omega_t + \omega_t\wedge\omega_t \\ &= \Omega + t(d\alpha + \omega\wedge\alpha + \alpha\wedge\omega) + t^2\alpha\wedge\alpha \\ &= \Omega + tD\alpha + t^2\alpha\wedge\alpha \end{aligned}$$

となる．ここで d を外微分とし，$D\alpha = d\alpha+\omega\wedge\alpha+\alpha\wedge\omega$ とおいた．α は $A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ の元，$D\alpha$ は $A^2(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ の元とみなすことができる．このとき D は ω に関する共変外微分である．いま，$J(t) = J(\omega_t) = \frac{1}{2}(\Omega_t,\Omega_t) = \frac{1}{2}\int_M\langle\Omega_t,\Omega_t\rangle * 1$ とおいて，$J'(0) = \left.\frac{d}{dt}J(t)\right|_{t=0}$ を計算する．

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\Omega_t\right|_{t=0} &= \left.\frac{d}{dt}\left(\Omega + tD\alpha + t^2\alpha\wedge\alpha\right)\right|_{t=0} \\ &= D\alpha \end{aligned}$$

となるので

$$J'(0) = (D\alpha, \Omega)$$

をえる．ここで，D の形式的随伴表現 $D^* : A^2(P\times_{Ad}\mathfrak{g}) \to A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ を

$$(D\alpha,\Omega) = (\alpha, D^*\Omega), \quad \forall\alpha \in A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$$

で定める．$\omega \in \mathscr{C}(P)$ が $J(\omega)$ の臨界点であるとは，$\omega_t = \omega + t\alpha$ に対し，$J'(0) = 0$ が成り立つときをいう．すなわち，すべての $\alpha \in A^1(P\times_{Ad}\mathfrak{g})$ に対して

$$J'(0) = (D\alpha,\Omega) = (\alpha, D^*\Omega) = 0$$

となるとき，$\omega \in \mathscr{C}(P)$ が J の臨界点になる．

1: 日大理工・院 (前)・数学

定義 2. 接続 ω が Yang-Mills 汎関数の臨界点になる条件は

$$D^*\Omega = 0$$

で与えられ，Yang-Mills 方程式とよぶ．これをみたす接続を Yang-Mills 接続とよぶ．

3. 4 次元多様体上の Yang-Mills 接続

以下，M は向きのついた 4 次元コンパクト Riemann 多様体とし，1 点 $x \in M$ の双対接空間 $T_x{}^*M$ を考える．いま M は 4 次元で，その上の 2 形式を考えると，Hodge の $*$ 作用素は $* : \bigwedge^2 T_x{}^*M \to \bigwedge^2 T_x{}^*M$ となる．また $*^2 = 1$ であるので，$*$ の固有値は ± 1 である．ここで主束 P を 1 つとると，同伴ベクトル束 $P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ に値をとる 2 形式の場合に拡張できる．すなわち $* : A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ となる．固有値 ± 1 に対応する固有空間分解

$$A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) = A_+(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \oplus A_-(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$$

をえる．$\oplus$ は直交直和である．P 上の接続 ω の曲率を R と表すと，この直和に従って曲率 $R \in A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ は

$$R = R_+ + R_-, \quad (*R_\pm = \pm R_\pm)$$

と分解される．ただし，$R_\pm \in A^2_\pm(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ である．

定義 3. $R_- = 0$（すなわち $R = R_+$）である接続を自己双対接続とよぶ．また，$R_+ = 0$（すなわち $R = R_+$）である接続を反自己双対接続とよぶ．

さて，前節で定めた Yang-Mills 汎関数を曲率 R をもちいて表し，J が P に依存する位相的不変量によって下からおさえらることをみよう．$Ad\,G$ 不変な内積 $\langle\, ,\, \rangle$ をもちいて，双線形写像 $\langle \wedge \rangle : A^p(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \times A^q(P \times_{Ad} \mathfrak{g}) \to A^{p+q}(M)$ を定めると，曲率 R に対して $\langle R \wedge *R \rangle = \langle R, R \rangle * 1, \langle R \wedge R \rangle = \langle R, *R \rangle * 1$ が成り立つ．ただし，右辺の $\langle\, ,\, \rangle$ は前節 2 で定めた内積である．$R_+ \wedge R_- = 0$ であることに注意すると

補題 4.

$$\langle R \wedge *R \rangle = (|R_+|^2 + |R_-|^2) * 1$$
$$\langle R \wedge R \rangle = (|R_+|^2 - |R_-|^2) * 1$$

が成り立つ．

双線形写像 $\langle \wedge \rangle$ をもちいると Yang-Mills 汎関数 $J(\omega)$ は

$$J(\omega) = \frac{1}{2}\int_M \langle R \wedge *R \rangle = \frac{1}{2}\int_M (|R_+|^2 + |R_-|^2) * 1$$

で与えられる．一方，Chern-Weil 理論により，特性形式のコホモロジー類 $[\langle R \wedge R \rangle]$ は接続に依存せず，P で決まる．特性形式を M 上で積分したもの，すなわち P の特性数を

$$c(P) = \int_M \langle R \wedge R \rangle = \int_M (|R_+|^2 - |R_-|^2) * 1$$

とかく．$J(\omega)$ と $c(P)$ を比較してみると，

定理 5.

$$J(\omega) \geq \frac{1}{2}|c(P)|, \quad \omega \in \mathscr{C}(P).$$

等号成立は ω が自己双対接続，すなわち $R_- = 0$ ($c(P) \geq 0$の場合) のとき，または ω が反自己双対接続，すなわち $R_+ = 0$ ($c(P) \leq 0$の場合) のときである．

ω が自己双対接続または反自己双対接続のとき，$J(\omega)$ は最小値をとるので，ω は Yang-Mills 接続になる．

例 6. 構造群 G が $SU(n)$ の場合を考えよう．まず $U(n)$ の場合を考える．Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ の不変な内積として

$$\langle X, Y \rangle = -\mathrm{tr}(XY), \quad X, Y \in \mathfrak{u}(n)$$

をとる．また，主束 P の同伴ベクトル束を E とかく．ファイバーは $\mathbb{C}^n$ である．したがって曲率 $R \in A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{u}(n))$ に対して $\langle R \wedge R \rangle = -\mathrm{tr}(R \wedge R)$ となる．さて，E の第 k-Chern 形式は

$$c_k(E, \omega) = \frac{(-1)^k}{(2\pi\sqrt{-1})^k k!} \sum \delta_{i_1 \cdots i_k}{}^{j_1 \cdots j_k} R_{j_1}{}^{i_1} \wedge \cdots \wedge R_{j_k}{}^{i_k}$$

で与えられる．$\delta_{i_1 \cdots i_k}{}^{j_1 \cdots j_k}$ は，$j_1 \cdots j_k$ が $i_1 \cdots i_k$ の偶置換なら 1，奇置換なら -1，その他は 0 を意味する．

$$c_1(E, \omega) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathrm{tr}(R)$$
$$c_2(E, \omega) = -\frac{1}{8\pi^2}(\mathrm{tr}(R) \wedge \mathrm{tr}(R) - \mathrm{tr}(R \wedge R))$$

となり

$$\mathrm{tr}(R \wedge R) = 4\pi^2(2c_2(E, \omega) - c_1(E, \omega)^2)$$

をえる．特性数

$$c_1(E)^2 = \int_M c_1(E, \omega)^2, \; c_2(E) = \int_M c_2(E, \omega)$$

をもちいると

$$c(P) = -\int_M \mathrm{tr}(R \wedge R) = 4\pi^2 \int_M c_1(E, \omega)^2 - 2c_2(E, \omega)$$
$$= 4\pi^2(c_1(E)^2 - 2c_2(E))$$

をえる．とくに $SU(n)$ の場合は，$\mathrm{tr}(X) = 0 (X \in \mathfrak{su}(n))$ であるので，$c_1(E, \omega) = 0$ となる．定理 5 より次式をえる．

$$J(\omega) \geq 4\pi^2 |c_2(E)|.$$

4. 参考文献

[1] 小林昭七, 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房 1989

[2] 茂木 勇, 伊藤光弘, 微分幾何学とゲージ理論, 共立出版 1986