K-54

高次特異値分解に基づく人工衛星のLPVモデリング

LPV Model Design for Artificial Satellites Based on Higher Order Singular Value Decomposition

○ゴカキ[1]，内山賢治[2]，増田開[2]
*WU JIAQI[1], Kenji Uchiyama[2], Kai Masuda[2]

A linear parameter variation (LPV) model for a CMG-carrying spacecraft is presented using the higher-order singular value decomposition (HOSVD) method. During the mission, the system parameters will vary with the spacecraft configuration. The LPV model can accurately describe the time-varying characteristics of the spacecraft parameters. Using the tensor product model transformation method, this paper converts the obtained LPV model into a multi-topological LPV model by HOSVD. Avoiding the process of fitting the matrix function expression of the LPV system can reduce the workload and the dependence on the experience of the designers, control the number of vertices under the premise of guaranteeing the modeling accuracy, and improve the automation of the modeling process.

１．緒論

人工衛星等の宇宙機には，ミッションに応じて，太陽電池パドルやロボットアーム，ソーラーセール等，展開構造物が取付けられる．展開構造物を有した宇宙機のダイナミクスは，厳密には非線形時変システムとして表現される．このようにシステムパラメータが変動する制御対象にはLPV（Linear Parameter-Varying）モデルに基づくゲインスケジュール制御（GS control: Gain-Scheduled control）が注目されている．この手法は大域的な安定性を保証しながら，広範囲の時変パラメータを持つシステムを扱うことができる．しかし，宇宙機の LPV マルチセルシステムのモデリングの段階では，モデリングの精度，複雑さ，保守性，コントローラの次数に対して，どのようにバランスとるかという事を十分に検討する必要がある．

本論文では，人工衛星モデルで，テンソル積モデル変換法を用いて，得られた LPV モデルを高次特異値分解(HOSVD)によりマルチ位相 LPV モデルに変換する．HOSVD 方法の実行可能性が確認する．また，LPV システムの行列関数式をフィッティングするプロセスを回避することで，作業負荷と設計者の経験への依存を軽減し，モデリング精度を保証するために頂点数を制御し，モデリングプロセス自動化の向上を図る．そして，従来法と比べ，HOSVD 方法の利点を確認する．従来法が表示困難のモデルの誤差を数値的に算出する．

２．HOSVD 理論で LPV モデルを立てる

2.１制御対象

Fig.1 に，4 つの CMG をピラミッド配置した宇宙機の姿勢制御装置の概念図を示す．外力による力のモーメントは無いものと仮定したとき，宇宙機の運動方程式は以下の方程式で表せる[4].

$$\dot{\mathbf{H}} + [\boldsymbol{\omega}]^{\times}\mathbf{H} = 0 \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{H}$は宇宙機の角運動量，$\boldsymbol{\omega}$は宇宙機の角速度である．宇宙機の角運動量$\mathbf{H}$には，次式に示すように CMG の角運動量$\mathbf{h}_i$ $(i = 1,\cdots,4)$が含まれる．

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{4}\mathbf{h}_i = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}_{act} \tag{2}$$

ここで，$\mathbf{J}$は宇宙機本体の慣性テンソルを示す．

2.２ HOSVD 理論

非線形システムの LPV モデルは

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}\end{cases} \tag{3}$$

スケジューリング変数$\boldsymbol{\rho}(t)$が$I_1, I_2, \ldots, I_N$個を分割させ，スケジューリング変数のグリッド・テンソル形式は$\boldsymbol{\rho}^E \in \mathbf{R}^{I_1\times I_2\times\ldots\times I_N}$となる．システムの中で平衡点$[\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\rho}_e^E), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\rho}_e^E)]$が存在し，$f(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\rho}_e^E), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\rho}_e^E)) = 0$が満足する場合，システムは

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}^E)\mathbf{x}_\delta + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}^E)\mathbf{u}_\delta \\ \mathbf{y}_\delta = \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}^E)\mathbf{x}_\delta + \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}^E)\mathbf{u}_\delta\end{cases} \tag{4}$$

と書き直す．

格子状のパラメータ空間で一連の平衡点

１：日大理工・院（前）・航宇，２：日大理工・教員・航宇

を線形化すると、テンソル形式のシステムの記述が得られる．そこで,

$\mathbf{A}^E \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N \times m \times m}$ $\mathbf{B}^E \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N \times m \times n}$

$\mathbf{C}^E \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N \times l \times m}$ $\mathbf{D}^E \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N \times l \times n}$

結果として得られるテンソル形式のシステム記述は，新しいテンソル $\mathbf{G}^E \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N \times (m+l) \times (m+m)}$に組み替えられる．ここで, $\mathbf{G}^E$の中の各要素はスケジューリング変数に関するものとなる．

$$\mathbf{G}^E = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^E(\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{B}^E(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{C}^E(\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{D}^E(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix} \tag{5}$$

テンソル$\mathbf{G}^E$の高次特異値分解は，最初のN個のモードにおける小さい特異値と対応する固有ベクトルを捨てて，$1-N$個のモードにおいて残った特異値の数は$a_1, a_2, \ldots, a_N$と仮定し, 得られた頂点の数は$M = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$とすると，LPV システムは次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_n^E \otimes \boldsymbol{\omega}_n(\boldsymbol{\rho}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i_1=1}^{a_1} \sum_{i_2=1}^{a_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{a_N} \omega_{1,i_1}(\boldsymbol{\rho}_1(t)) \ldots \omega_{n,i_N}(\boldsymbol{\rho}_n(t)) \cdot \left(\mathbf{A}_{i_1,i_2,\ldots,i_N}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{i_1,i_2,\ldots,i_N}\mathbf{u}(t)\right) \tag{7}$$

そこで，$\omega_{n,i}$は以下の条件を満足する必要がある．

$$\begin{cases} \forall\, n, i, \boldsymbol{\rho}_n(t) \colon \omega_{n,i}(\boldsymbol{\rho}_n(t)) \in [0,1] \\ \forall\, n, \boldsymbol{\rho}_n(t) \colon \sum_{i=1}^{I_N} \omega_{n,i}(\boldsymbol{\rho}_n(t)) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

モデル化誤差は次式で算出できる．

$$\gamma = \left(\|\mathbf{S}^E - \mathbf{S} \otimes \mathbf{U}_n\|_{L_2}\right)^2 \leq \sum_k a_k^2 \tag{9}$$

３．数値シミュレーション結果

Table.1 は HOSVD で LPV モデルを立てるときの特異値の結果である. 端点を選択する場合は，より大きな特異値の数が保留する．つまり, システムが自動的に端点を選択するという本論文の要件を満たす. Table.1 の結果から，衛星モデルを対象として，4 端点を持つマルチセル LPV モデルが得られる. 従来の LPV モデルを立てる方法では，8 端点のモデルを扱いされている. それと比べ, HOSVD 方法は端点が少ない，計算量を減らすことを証明した．

また，式（10）より計算された LPV モデルのモデル化誤差は 0.0030507 となっている．モデル設計に満足させる．

以上の結果に基づいて，衛星モデルに対して，HOSVD 方法で LPV モデルを立てることは実現可能性となっている．

Table.1 HOSVD decomposition results of the LPV model

Expand matrix	The 1st-order singular value	The 2nd-order singular value	The 3rd-order singular value
A_1	46.9826	46.9826	66.4434
A_2	46.9826	46.9826	0.0000

４．まとめ

人工衛星モデルで，テンソル積モデル変換法を用いて，得られた LPV モデルを高次特異値分解(HOSVD)によりマルチ位相 LPV モデルに変換する．HOSVD 方法の実行可能性が確認した．また，システムが自動的に端点を選択して，システムの自動化を向上することを実証した．従来の方法と比べ，端点の量を少ない，計算量を減らすことができた．LPV システムの誤差を数値的に算出した．

5. 参考文献

[1] Xing He, Wei Jiang, and Caisheng Jiang: "Robust Controller Designing for an Air-Breathing Hypersonic Vehicle with an HOSVD-Based LPV Model", International Journal of Aerospace Engineering Volume 2021, Article ID 7570059, 12 pages,2021.

[2] Wei Jiang, Hongli Wang, Jinghui Lu, and Zheng Xie: "HOSVD-based LPV modeling and mixed robust H2/H∞ control design for air-breathing hypersonic vehicle", Journal of Systems Engineering and Electronics Vol. 27, No.1, pp. 183 – 191, February 2016

[3] Sun Bin, Yang Lingyu, and Zhang Jing:: "Robust LPV control design based on HOSVD", Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 42(7): 1536-1542,2016