O-10

背景時空におけるスカラー場の揺らぎの評価

Evaluation of scalar fluctuations in spacetime backgrounds

○矢屏周作[1]，　三輪光嗣[2]

*Yabei Shusaku[1], Miwa Akitsugu[2]

Abstract :In this presentation, we review an efficient method for computing contributions of fluctuations to partition functions in semiclassical quantization based on [1]. Specifically, we discuss an expression for the determinant, which is the contribution of fluctuations, as a product over the quasinormal mode. We explain the evaluation of the determinant for the AdS black hole spacetime and dS spacetime as background.

1．導入

重力の半古典的量子化とは、背景時空は古典的に扱い、その周りの微小な揺らぎの量子効果を取り入れる手法である。この半古典的量子化では、分配関数を計算すると、以下のような背景時空における行列式が出現する。

$$\det(-\nabla^2)^{-1} \tag{1}$$

ここで、共変微分 ∇ は背景時空の計量テンソルによって決定される。揺らぎの演算子の固有値が明示的である場合、分配関数を求めることは容易であるが、固有値が明示的でない場合、行列式の評価は非自明である。

今回の発表は [1] を中心とした review であり、揺らぎの演算子の固有値が明示的でない場合、どのように行列式を評価すればよいのかを紹介する。具体的には、AdS(Anti de Sitter) ブラックホール時空と dS(de Sitter) 時空を背景とした場合の揺らぎの評価を紹介する。

2．調和振動子

まず初めに、２自由度調和振動子（１次元複素スカラー場）に周期的境界条件 $\phi(\tau)=\phi(\tau+1/T)$ を課して考えていく。時間方向は Wick 回転していて、逆温度 $1/T$ で周期性をとる。

$$Z(\kappa)=\int D\phi D\bar{\phi}\exp(-\int_0^{1/T}d\tau(|\partial_\tau\phi|^2+\kappa|\phi|^2)) \tag{2}$$

演算子 $-\partial_\tau^2+\kappa$ の固有値が明示的であるため、容易に分配関数を計算することが可能であり、次のようになる。

$$Z(\kappa)=\frac{1}{4\sinh^2(\frac{\sqrt{\kappa}}{2T})} \tag{3}$$

この求めるべき分配関数を別のアプローチで考えてみる。演算子 $-\partial_\tau^2+\kappa$ がゼロモードを持つときに、分配関数が極を持つことを利用する。これは、以下の固有値方程式の解が周期的境界条件を満たす時である。

$$(-\partial_\tau^2+\kappa)\phi(\tau)=0\ ,\ \phi_\pm(\tau)=e^{\pm\sqrt{\kappa}\tau} \tag{4}$$

固有値方程式の解が周期的境界条件を満たすときに κ の条件が現れる。その κ を極に持つ関数を考察し、分配関数はこの関数と同じ極を持つ有理型関数であることを仮定することで、同様の分配関数、すなわち、(3) 式を求めることが可能である。

3．AdS ブラックホール時空を背景とした場合の揺らぎの評価

次のような事象の地平面を持つ $d+1$ 次元時空を背景とする。

$$ds^2=-V(r)dt^2+V(r)^{-1}dr^2+r^2d\Omega_{d-1}^2 \tag{5}$$

$$(V(r)=1-\frac{M}{r^{d-2}}+\frac{r^2}{L^2}) \tag{6}$$

Wick 回転 $t=-i\tau$ を行い、適当な動径座標 ρ に対して、事象の地平面付近の計量は次のようになる。

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2+r^2d\Omega_{d-1}^2 \tag{7}$$

$$(\theta=2\pi T\tau)$$

このような背景において、然るべき境界条件を課し、揺らぎの評価を行う。

$$Z(\Delta)=\int D\phi D\phi^*\exp(-\int\phi^*(-\nabla^2+m^2)\phi) \tag{8}$$

調和振動子と同様のアプローチを行いたいのだが、事象の地平面があるので、以下のように、複素座標 $u=\rho e^{-i\theta}$ において、複素スカラー場 ϕ が事象の地平面付近で特異性を持たないようにする。

$$\phi\sim\begin{cases}u^n=\rho^n e^{-in\theta}=\rho^{\omega_n/2\pi T}e^{-i\omega_n\tau} & (n>0)\\ \bar{u}^{-n}=\rho^{-n}e^{-in\theta}=\rho^{-\omega_n/2\pi T}e^{-i\omega_n\tau} & (n\leq 0)\end{cases} \tag{9}$$

n によって場合分けを行い、調和振動子と同様にして、特異性の仮定を考慮して計算すると、分配関数を以下の形に書くことができる。

$$Z=e^{Pol(\Delta)}\prod_{z_*,\bar{z}_*}\frac{\sqrt{z_*\bar{z}_*}}{4\pi^2T}\Gamma(\frac{iz_*}{2\pi T})\Gamma(\frac{-i\bar{z}_*}{2\pi T}) \tag{10}$$

$Pol(\Delta)$ は Δ の特異性を持たない関数であり、z_* は準固有振動数である。z_* が準固有振動数であることは、固有値方程式の解に含まれる振動数が満たす条件によって判明する。

[1] 日大理工・院 (前)・物理　[2] 日大・教員・物理

４．dS 時空の準固有振動数

話は変わるが、dS 時空の準固有振動数について述べておきたい [2].

曲率と結合した質量を持つスカラー場を考える。

$$(\Box^2 + \mu^2 + \xi R)\Phi = 0 \tag{11}$$

μ は粒子の質量、$R = d(d+1)/L^2$ は dS 時空のスカラー曲率であり、ξ は実クライン・ゴルドン場と時空の曲率の結合定数 $\xi > 0$ である。dS 時空

$$ds^2 = -P(r)dt^2 + P(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \tag{12}$$

$$(P(r) = 1 - \frac{r^2}{L^2}) \tag{13}$$

では、クライン・ゴルドン方程式は以下のような形になる。

$$(\frac{1}{P}\partial_t^2 - \frac{1}{r^{d-1}}\partial_r(r^{d-1}P\partial_r)$$

$$-\frac{1}{r^2}\tilde{\nabla}^2 + m^2)\Phi = 0 \tag{14}$$

$$\Phi = e^{-izt}Y_{l\alpha}\theta(r) \tag{15}$$

$$\tilde{\nabla}^2 Y_{l\alpha} = -l(l+d-2)Y_{l\alpha} \tag{16}$$

$\tilde{\nabla}^2$ は $(d-1)$ 次元球面上のラプラシアンを表し、球面調和関数 $Y_{l\alpha}$ に作用して (16) 式のように固有値を出す。l は角運動量を表し、α は縮退を表す。$m^2 = \mu^2 + \xi R$ である。

関数 $\theta(r)$ は以下の微分方程式の解である。

$$\{(1 - \frac{r^2}{L^2})\partial_r^2 + (\frac{d-1}{r} - \frac{(d+1)r}{L^2})\partial_r$$

$$+\frac{z^2}{1-\frac{r^2}{L^2}} - \frac{l(l+d-2)}{r^2} - m^2\}\theta = 0 \tag{17}$$

(17) 式に変数変換を行い、関数 $\theta(r)$ を再定義すると、超幾何微分方程式に簡略化できる。超幾何関数の性質を利用し、準固有振動数の条件を満たすようにすると、準固有振動数は次のようになる。

$$z_{n,l,\pm} = -i\frac{2n+l+\Delta_\pm}{L} \tag{18}$$

$$(n, l = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$(\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm (\frac{d^2}{4} - (mL)^2)^{\frac{1}{2}})$$

５．dS 時空を背景とした場合の揺らぎの評価

$d+1$ 次元の dS 時空を背景場としたときも、AdS ブラックホール時空と同様に考えることが可能であることを紹介する。　準固有振動数は (18) 式を用いて、次のように表記する。

$$z_{\kappa,\pm} = -i\frac{\kappa+\Delta_\pm}{L} \tag{19}$$

$$\kappa = 2n + l$$

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm i\nu\ ,\ \nu \equiv \sqrt{(mL)^2 - (\frac{d}{2})^2}$$

dS 時空では、AdS 時空のように然るべき境界条件を持たないので、Δ_+ と Δ_- の両方が現れることに注意する。これらを (10) 式に代入し、準固有振動数の縮退を考慮することで、分配関数の計算が可能である。

$$\begin{aligned}\log Z &= Pol(\nu) - 2\sum_{\kappa,n\geq 0,l,\pm} D_l \log(\kappa + n + \Delta_\pm) \\ &\quad + \sum_{\kappa\geq 0,l,\pm} D_l \log(\kappa + \Delta_\pm) \\ &= Pol(\nu) - \sum_{\pm,r\geq 0} Q(r)\log(r + \Delta_\pm)\end{aligned} \tag{20}$$

$$Q(r) = \frac{2r+d}{d}\begin{pmatrix} r+d-1 \\ d-1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

D_l は準固有振動数の縮退である。

ここで、$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{Q(r)}{(r+x)^s} = Q(-x+\delta_s)\zeta(s,\Delta_\pm)$ を用いて (20) 式を正則化すると、以下のように分配関数を求めることができる。

$$\log Z = Pol(\nu) + \sum_\pm Q(-\Delta_\pm + \delta_s)\zeta'(s,\Delta_\pm)|_{s=0} \tag{22}$$

δ_s は、関数 $f(s)$ に $\delta_s f(s) = f(s-1)$ のように作用する演算子である。また、$\zeta'(s,\Delta_\pm)$ は Hurwitz のゼータ関数の s 微分を表している。

$$\zeta(s,q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q+n)^s} \tag{23}$$

６．まとめ

調和振動子から始め、固有値が明示的でない AdS ブラックホール時空を背景とした場合の行列式を (10) 式のように書き、それが dS 時空にも適用できることを review した。

今後は、[1] の Δ の特異性を持たない関数 $Pol(\Delta)$ の求め方を読み進めていきたい。

参考文献

[1] Frederik Denef , Sean A. Hartnoll and Subir Sachdev "Black hole determinant and quasinormal modes" Class. Quant. Grav. 27 (2010) 125001 [arXiv:hep-th/0908.2657].

[2] A. Lopez-Ortega "Quasinormal modes of D-dimensional de Sitter spacetime," Gen. Rel. Grav. 38, 1565 (2006) [arXiv:gr-qc/0605027].