O-13

ボゾン・フェルミオン双対性と１次元２体エフィモフ効果

Boson-fermion duality and two-body Efimov effect in one dimension

○中村颯太[1]，　大谷聡[2]
*Sota Nakamura[1], Satoshi Ohya[2]

Abstract: Recently, it has been shown that the Efimov effect can be realized in a two-body problem of identical bosons on the half line, where the boundary plays the role of the infinitely heavy third particle. In this work, we generalize this result to fermionic systems by using the boson-fermion duality.

１．導入

量子多体問題で連続的スケール不変性が離散的スケール不変性に破れると，束縛エネルギーが等比数列を成す無限個の多体束縛状態が現れる．これがエフィモフ効果であり 1970 年に同種ボゾン3.体系で理論的に予言[1]されて以来，多くの研究者によって精力的に研究されてきた．当初はエフィモフ効果に対して懐疑的な向きもあったようだが，現在では冷却原子系で実験的にも観測され[2]，その存在は確固たるものとなっている．

さて,このエフィモフ効果は粒子間相互作用が２体接触相互作用ならば低エネルギーで必ず発現する普遍的な現象なのだが，実は空間次元には依存し，特に低次元系では発現しないと長らく信じられていた．しかし最近になって１次元系でもエフィモフ効果が発現することが判明し，特に空間に境界がある場合は，境界が無限に重い第３の粒子の役割を果たし，２体系でもエフィモフ効果が現れることがわかってきた[3]. ただし，この１次元２体問題におけるエフィモフ効果は同種ボゾン系に対して調べられたのみで，同種フェルミオン系に対してエフィモフ効果が発現するか否かは依然不明であった．本研究ではボゾン・フェルミオン双対性を用いて半直線上の同種フェルミオン２体系でもエフィモフ効果が現れることを明らかにする．まずはスケール不変な同種２体問題の一般論から始めよう．

２．スケール不変な１次元２体問題

半直線$\mathbb{R}_+ = \{x: 0 \leqq x \leqq \infty\}$上に住む質量 m の同種２粒子系を考えよう.．２粒子系の位置座標をx_1, x_2とすると，この２粒子系のハミルトニアンHは一般に次の形をとる　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　．

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + V(x_1, x_2) \tag{1}$$

ここで V は粒子間相互作用のポテンシャルであり，以下では次の条件を満たすものを考える．

‣置換対称性

$$V(x_1, x_2) = V(x_2, x_1) \tag{2a}$$

‣局所性

$$\mathrm{supp}(V) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 = x_2\right\} \tag{2b}$$

‣スケール不変性

$$V(e^t x_1, e^t x_2) = e^{-2t} V(x_1, x_2), \forall t \in \mathbb{R} \tag{2c}$$

条件(2a)は同種粒子の識別不可能性を保証するために必要であり，条件(2b)は粒子間相互作用が接触相互作用であることを表す．また条件(2c)はエフィモフ効果が発現するために必要である．以下ではまずこのような２体問題におけるスケール不変性の帰結を見ておこう．

まずはポテンシャル V が条件(2c)を満たすとき，ハミルトニアンはスケール変換$(x_1, x_2) \mapsto (e^t x_1, e^t x_2)$の下で$H \mapsto e^{-2t} H$と変換される．これより,$\psi_E(x_1, x_2)$を方程式$H\psi_E(x_1, x_2) = E\psi_E(x_1, x_2)$を満たすエネルギー固有関数とすると，$H\psi_E(e^t x_1, e^t x_2) = e^{2t} E\psi_E(e^t x_1, e^t x_2)$が成り立つことが分かる．すなわち$\psi_{e^{2t}E}(x_1, x_2) \propto \psi_E(e^t x_1, e^t x_2)$が成り立つ．比例定数は規格化条件より決めることができ，結果はエネルギー固有関数に対する次のスケーリング則になる．

$$\psi_{e^{2t}E}(x_1, x_2) = e^{2t} E\psi_E(e^t x_1, e^t x_2) \tag{3}$$

このスケーリング則が任意の$t \in \mathbb{R}$に対して成り立つならば，エネルギー固有値は必ず連続固有値になる．しかし引力相互作用の下では，実は式(3)はある正数$t_\star$の整数倍$t \in t_\star \mathbb{Z} = \{0, \pm t_\star, \pm 2t_\star, \cdots\}$に対してのみ成り立ち，等比数列$E_n = E_0 e^{-2nt_\star}$の形を取る無限個の離散固有値が現れる．次にこのスケール不変性の破れの機構を一般的に見ておこう．

まず以下の議論では次式で定義される極座標系(r, θ)を導入しておくと便利である．

$$x_1 = r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), x_2 = r\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \tag{4}$$

１日大理工・院（前）・量子　２日大・教員・量科研

この極座標系とスケール不変性(2c)を使うと，ポテンシャル V は一般に次の形を取ることが分かる．

$$V(x_1,x_2)=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{v(\theta)}{r^2} \tag{5}$$

ただしr_0を任意の定数として$v(\theta)$を

$v(\theta)=(\frac{2mr_0^2}{\hbar^2})V\left(r_0\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),r_0\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)$と定義した．運動エネルギー項も極座標で書き表すと，結局

$$H=\frac{\hbar^2}{2m}r^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{-\partial^2+V(\theta)-\frac{1}{4}}{r^2}\right)r^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

となる，2 体の波動関数を

$$\psi(x_1,x_2)=r^{-\frac{1}{2}}R(r)\Theta(\theta) \tag{7}$$

の形に仮定すると，固有値方程式$H\psi=E\psi$は

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+v(\theta)\right)\Theta(\theta)=\lambda\Theta(\theta) \tag{8a}$$

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\lambda-\frac{1}{4}}{r^2}\right)R(r)=\frac{2mE}{\hbar^2}R(r) \tag{8b}$$

の形に帰着する．式(8b)より同種 2 体系のエネルギー固有値 E は逆 2 乗ポテンシャル中の 1 体問題で決まることが分かる．この 1 体問題は$\lambda<0$のとき連続的スケール不変性が離散的スケール不変性に破れ，次の形の無限個の離散固有値が現れることが知られている[4].

$$E_n=E_0e^{-2nt_\star},n\in\mathbb{Z} \tag{9}$$

ただし$t_\star=\pi/\sqrt{|\lambda|}$であり,$E_0(<0)$はスケール不変性の破れに伴って現れるエネルギースケールである．

以上の一般論から，負の固有値 λ が固有値方程式(8a)にあればエフィモフ効果は発現することがわかった．次にボソンとフェルミオンの両方に対してそのような相互作用ポテンシャル$v(\theta)$を同定しよう．

３．ボソン・フェルミオン双対性

置換対称性(2a)と局所性(2b)は$v(\theta)$に対し$v(\theta)=v(-\theta)$および$\mathrm{supp}(v)=\left\{\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]:\theta=0\right\}$を課すが，このようなポテンシャルで確率保存則と無矛盾なものは本質的に 2 種類しかない．

まず一つ目は次のデルタ関数ポテンシャルである。

$$v_B(\theta)=2g_B\delta(\theta) \tag{10}$$

ただしg_Bは無次元の結合定数である．ボソンの対称波動関数に対しては式(10)は次の境界条件に帰着する．

$$-\Theta'_B(0_\pm)\pm g_B\Theta_B(0_\pm)=0 \tag{11}$$

この境界条件が一次元同種ボゾン系に対するスケール不変な粒子間相互作用を表す．これは先行研究[3]で用いられた相互作用と等しく，フェルミオンに対して効果がないことに注意する．

2 つ目はイプシロン関数ポテンシャルと呼ばれるもので次の極限で定義される[5].

$$v_F(\theta)=\lim_{a\to0}\left(\frac{1}{g_F}-\frac{1}{a}\right)\left(\delta(\theta+a)+\delta(\theta-a)\right) \tag{12}$$

ただしg_Fは無次元の結合定数である．このポテンシャルはボゾンに対しては効果がないが，フェルミオンの反対称波動関数に対しては次の境界条件に帰着される．

$$-\Theta_B(0_\pm)\pm g_B\Theta'_B(0_\pm)=0 \tag{13}$$

この境界条件が 1 次元同種フェルミオン 2 体系に対するスケール不変な粒子間相互作用を表す.

さて，式(11)と式(13)は結合定数の間に次の関係が成り立つとき等価になる．

$$g_F=\frac{1}{g_B} \tag{14}$$

これは 1 次元では同種ボゾン系と等価な同種フェルミオン系が必ず存在するという双対性の現れで，特に式(14)は一方の強結合領域は他方の弱結合領域と等価であるという強弱双対性を表す．先行研究[3]からボゾン系では結合定数g_Bが$\left(-\infty,-\frac{4}{\pi}\right)$の領域にあるとき，固有値方程式(8a)に負の固有値が現れることが分かっている．従って，強弱双対性よりフェルミオン系では結合定数g_Fが$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$の領域にある場合に負の固有値が現れる。すなわちこの場合にエフィモフ効果が発現する．

４．まとめと今後の展望

半直線上の同種粒子 2 体問題を考察し,ボゾンとフェルミオンの両方に対してエフィモフ効果が発現する模型を構築した．

今後は半直線上の同種$n(\geqq 3)$体問題への拡張や，実験室での実現方法などを明らかにしたい．

参考文献

[1] V. Efimov, Phys. Lett. B 33 (1970) 563-564
[2] T. Kraemer et al., Nature 440 (2006) 315-318, arXiv: cond-mat/0512394.
[3] S. Ohya, Am. J. Phys. 90 (2022) 770-777, arXiv:2201.10869[cond-mat. quant-gas].
[4] K. M. Case, Phys. Rev. 80 (1950) 797-806.
[5] T. Cheon and T. Shigehara, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 2536-2539, arXiv: quant-ph/9806041.