O-3

ブラックホール情報パラドクス
Black hole information paradox

○西村拓人[1]
*Nishimura Takuto[1]

Abstract : We review the black hole information paradox. After a brief description about black holes, quantum entanglement, and the Hawking radiation I introduce the recent progress in resolving the paradox based on the Ryu-Takayanagi formula and the Island formula.

１．導入

ブラックホールと輻射を含む全量子系は全時間に渡って純粋状態であると仮定する．そのため,t=0 における von neumann entropy は 0 である. 一方, 輻射が進むにつれて輻射のエントロピーは増え続ける．しかし, それとは対照的に粗視化 BH エントロピーは面積の減少に伴い, 減少する．Schmidt 分解により,Page 時間 (von neumann entropy が最大になる時間) の後は値の小さい方を選ぶ. 素朴に考えるのなら輻射のエントロピーは増加し続けなくてはならないのだが, 上述のように減少してしまう．これは情報パラドクスの定式化だと考えられているものである.(page curve) そこで, エントロピーを矛盾なく導出するために新しい公式を提案しなくてはならない．それが Island rule である.

２．BH の幾何学

中心対称な重力場を調べる. 無限小線素に対する最も一般的な式は

$$ds^2 = h(r,t)dr^2 + k(r,t)(\sin^2\theta + d\theta^2) + l(r,t)dt^2 + a(r,t)drdt \tag{1}$$

一般相対論では基準系を任意に設定できるので,ds^2 の中心対称性を壊さずに, さらに座標変換をすることができる. よって, これら 2 つの条件を利用して,$a = 0$,$k = r^2$ という座標系を取ることができる．このようにしても一般性を失わない. 残った h,l は $h = -e^{\lambda}$,$l = c^2e^{\nu}$ という形で扱うので後で便利である. こうして計量は,

$$ds^2 = -e^{\nu}c^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{2}$$

以降座標系を $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct = \tau, r, \theta, \varphi)$ と表す. 場を生じる物質の外側で中心対称場を考える.Einstein 方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g\mu\nu R = 0 \tag{3}$$

より,

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

ここで, 計量テンソルとクリストッフェル記号,Ricci テンソルの 0 でない成分について調べる．このことから, 解くべき微分方程式は $\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'}{4}(\lambda' - \nu') = 0$,$\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu^{\nu}}{4}(\nu' - \lambda') = 0$,$e^{\lambda} - 1 - \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') = 0$ となる. 第一式と第二式から,$\frac{1}{r}(\nu' + \lambda') = 0$ が成り立つため,$\nu + \lambda = \beta$ であるが, さらにこれを第三式にして λ のみの微分方程式を作ると,

$$e^{\lambda} - 1 + r\lambda' = 0 \tag{5}$$

より, $(re^{\lambda})' = 1$ となる. この結果 $e^{\nu} = e^{\beta}(1 - \frac{\alpha}{r})$ となり (α は定数), 時間のスケールを取り直して $e^{\beta} = 1$ と取れば,

$$ds^2 = -(1 - \frac{\alpha}{r})d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{6}$$

が得られる.r →∞で Minkowski 時空に漸近すること, そこからの最低次の補正が Newton 重力であることを考えると

$$\alpha = r_g = \frac{2GM}{c^2} \tag{7}$$

となることがわかる. 以上が Schwarzschild 時空と呼ばれるものである.r_g を Schwarzschild 半径,$r = r_g$ の領域を事象の地平線 (イベント・ホライズン), その内部をブラックホールと呼ぶ. ホライズンを超えて進むと, ライトコーンが内向きになるので, 一度ブラックホールに飲み込まれた情報は外部に戻ってくることはできない.

３．量子もつれ

複合系の量子状態が, それを構成する部分系の量子状態の直積で記述できるとき, 部分系はセパラブルであるという. 一方、複合系の量子状態が, それを構成する部分系の量子状態で記述できないとき, 部分系は量子的にもつれている (エンタングルしている) という. このとき, 複合系の状態をエンタングル状態と呼ぶ.

4.Hawking 輻射と情報パラドクス

古典論ではブラックホールは何もその外側に出てこれない時空の穴である. しかし, 量子論に進むと, ブラックホールには熱的放射があることが知られており, これは Hawking 放射と呼ばれる. 以下, これについて説明する.
はじめに有名なブラックホール・エントロピーの面積則

[1] 日大理工・院 (前)・物理

について述べる.schwarzschild 計量から出発する.

$$ds^2 = -(1-\frac{2GM}{r})dt^2 + (1-\frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\omega_{d-1} \tag{8}$$

はじめに, 時間成分を Wick 回転し,$\tau = i\tau$ として Euclid 化する. ここで,$\theta = \frac{\tau}{4GM}$,$\rho = \sqrt{8GM(r-2GM)}$ と座標変換し, 簡単のため M →∞の場合を考えると,

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dy_i^2 \tag{9}$$

この式は θ 座標が周期 2π をもてば 2 次元部分が通常の極座標なので時空が正則であるが, そうでなければ原点でコニカル特異点を持ってしまう. コニカル特異点とは, 円錐の先のような特異点で, 測地線をそこから先に延ばすことができない状態である. 特異点を避けるためには, 虚時間の周期が

$$\tau = 8\pi GM \tag{10}$$

であることが要請される. この状態は統計力学的には

$$T = \frac{1}{8\pi GM} \tag{11}$$

という有限温度系であることを意味する. これを Hawking 温度とよぶ. ブラックホールのホライズンでの Hawking 温度は

$$T = \frac{a}{2\pi} \tag{12}$$

と表せる.(a は表面重力 $\frac{1}{4GM}$) 熱力学の第一法則は $dU = TdS$ と表せるが, 内部エネルギー U をブラックホールの静止エネルギー M と同一視し,Hawking 温度を代入すると

$$dS = 8\pi GMdM \tag{13}$$

となる. したがって, 積分を実行すると

$$S = 4\pi GM^2 \tag{14}$$

が得られる. ブラックホールのホライズンにおいては Schwarzschild 半径が $r = 2GM$ であるから,

$$S = \frac{A}{4G} \tag{15}$$

つまりブラックホールのエントロピーは示量的ではなく面積に比例している. これを Bekenstein-Hawking の法則と呼ぶ.

次に情報パラドクスについて述べたい. 以上で見てきたようにブラックホールでは熱放射が起こっており、この放射が続くとブラックホールは最終的に蒸発する. もしそうなら, もともと理論はユニタリーな時間発展で記述される純粋状態であったのに対して, 蒸発後はトレースアウトすることができないはずなのに混合状態のカノニカル分布が残ってしまう. ユニタリーな時間発展は純粋状態を純粋状態に保ち, このときの von Neumann entropy は 0 のままとなるが, カノニカル分布の混合状態では von neumann entropy が正となる. つまり, 情報量が増えてしまう. これがブラックホールの情報パラドクスである. このパラドクスを定式化したものは Page curve と呼ばれる.

5.Ryu-takayanagi formula と Island formula

CFT 側のエンタングルメント・エントロピーに対応する AdS サイドの物理量が存在する. これを求めるのが Ryu-takayanagi formula である.CFT 側の領域 A を囲む AdS 側の極小曲面 γ_A の面積を $Area(\gamma_A)$ とする. また, 重力側の Newton 定数を G とする. このとき, 部分系 A におけるエンタングルメント・エントロピー S_A は,Bekenstein-Hawking の法則の類推から

$$S = \frac{Area(\gamma_A)}{4G} \tag{16}$$

で与えられると考えられる. これは Ryu-Takayanagi fotmula と呼ばれている. これまで数多の系で証明されており, また,AdS/CFT 対応に基づいたかなり一般性の高い証明がごく最近になって与えられた.[1],[2],[3]

尚, 量子補正まで考慮した RT 公式は, 以下の式で書ける

$$S(A) = min_{\gamma_A} ext_{\gamma_A}[\frac{Area(\gamma_A)}{4G_N} + S_{ent}(\sigma_A)] \tag{17}$$

Island formula と呼ばれるものがあり, 次のように表される.

$$S(\rho_R) = min\, ext_I[\frac{A(\partial I)}{4G} + S_{QFT}(I \cup R)] \tag{18}$$

この Island formula によりどのように情報パラドクスが解決されるのか紹介していきたい.

6. まとめ

情報パラドクスの定式化と RT 公式, 及びその発展について紹介した.

今後は,JTgravity 以外の他の模型についても Island formula を適用していきたい.

7. 参考文献

［1］ Ahmed Almheiri, Thomas Hartman, Juan Maldacena, Edgar Shaghoulian, and Amirhossein Tajdini ” Replica Wormholes and the Entropy of Hawking Radiation ”

［2］「ホログラフィー原理と量子エンタングルメント」　高柳匡　著

［3］「量子系のエンタングルメントと幾何学」　松枝宏明　著