O-4

無限高階微分を含む場の理論のハミルトン形式の構築

Hamiltonian formalism for infinite derivative field theories

○春日優弥[1],岩本弘一[2]
*Kasuga Yuya[1], Iwamoto Koichi[2]

Abstract: Super-renormalizable quantum gravity theories without ghosts have been realized by using nonlocal Lagrangian densities. However, a special formalism, (1+1) dimensional Hamiltonian method, is needed to cast nonlocal theories into Hamiltonian formalism for canonical quantization. We consider a Hamiltonian formalism for the nonlocal theories, where nonlocal terms are replaced by local ones following the prescription of the (1+1) dimensional method.

１．はじめに

非局所的な場の理論は量子重力理論や超弦理論の構築に用いられ，近年注目が高まっている．特に，２０１５年Biswasにより非局所的な場の理論を用いることでゴースト場を持たず１ループまで繰り込み可能な量子重力理論が構築できることが指摘されている[1].

その一方で，非局所的な場の理論には正準形式の構築が困難だという問題点がある[2]. その点に取り組んだのが Kolar（２０２０）である．時間を１次元拡張した（１＋１）次元ハミルトン形式であれば，非局所的な場の理論においても正準形式を構築できると指摘している[3].

これらの先行研究を踏まえ，我々は Kolar の（１＋１）ハミルトン形式を基にした新たな方法で非局所的な場の理論の正準形式の構築を目指す.

２．非局所場の置き換えと拘束条件の導入

本研究では，まず以下の非局所的な場を含む空間一様な自由スカラー場の作用を用いて計算を行った.

$$S=\int dt\left(-\frac{1}{2}q(t)a(\partial_t^2)\ddot{q}(t)\right) \tag{1}$$

ここで，$a(\partial_t^2)$は

$$a(\partial_t^2)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\partial_t^{2k} \tag{2}$$

で表される無限高階微分演算子である．この作用の非局所性はこの演算子によって表現されている. 一方で，この高階微分が正準形式の構築を困難にする原因にもなっている.

そこで，非局所的な場を次のような局所的な場に書き換え，書き換えに伴う拘束条件を作用に導入する.

$$\tilde{q}(t)=a(\partial_t^2)q(t) \tag{3}$$

$$S=\int dt\left(-\frac{1}{2}q(t)\ddot{\tilde{q}}(t)+\xi(t)\big(\tilde{q}(t)-a(\partial_t^2)q(t)\big)\right) \tag{4}$$

さらに，部分積分を行い高階微分する対象を$q(t)$から$\xi(t)$に変更しておく.

$$S=\int dt\left(\frac{1}{2}\dot{q}(t)\dot{\tilde{q}}(t)+\xi(t)\tilde{q}(t)-q(t)a(\partial_t^2)\xi(t)\right) \tag{5}$$

３．場の（１＋１）次元化

次に，以下の式に従って非局所場$a(\partial_t^2)\xi(t)$を（１＋１）次元化する.

$$D(\partial_t)\xi(t)=\int ds\,\xi(t+s)K(s) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&D(\partial_t)\xi(t)|_{\xi(t+s)=\Xi(t,s)}\\&=\int ds\,\Xi(t,s)K(s)=D(\partial_s)\Xi(t,0)\end{aligned} \tag{7}$$

空間一様な非局所的な場は，（６）式のようなtとは異なる時間sによる積分で表現できる. そのような非局所的な場は（７）式によって局所的に書き直すことができる．これが場の（１＋１）次元化である.

（５）式に（６）,（７）の置き換えを施し，伴って$q(t),\tilde{q}(t)$をt,sの関数$Q(t,s),\tilde{Q}(t,s)$に置き換えたものが次の式である.

$$\begin{aligned}S=\int dt\Big(&\frac{1}{2}Q'(t,s)\tilde{Q}'(t,s)+\Xi(t,s)\tilde{Q}(t,s)\\&-Q(t,s)a(\partial_s^2)\Xi(t,s)\Big)\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，ここで$\dot{F}=\partial_tF,F'=\partial_sF$である.

４．正準形式の構築

（８）式からオイラー・ラグランジュ拘束条件と運動量拘束条件を導出する．まず,（８）のラグランジアンを 3 種類の場でそれぞれ変分を取ると次のようになる.

１：日大理工・院（前）・物理　２：日大理工・教員・物理

$$\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}(t,s)}{\delta\Xi(t,\tilde{s})} = \delta(s-\tilde{s})\tilde{Q}(t,s) - Q(t,s)a(\partial_s^2)\delta(s-\tilde{s}) \quad (9)$$

$$\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}(t,s)}{\delta Q(t,\tilde{s})} = \frac{1}{2}\delta'(s-\tilde{s})\tilde{Q}'(t,s) - \delta(s-\tilde{s})a(\partial_s^2)\Xi(t,s) \quad (10)$$

$$\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}(t,s)}{\delta\tilde{Q}(t,\tilde{s})} = \frac{1}{2}Q'(t,s)\delta'(s-\tilde{s}) + \Xi(t,s)\delta(s-\tilde{s}) \quad (11)$$

この量を用いて，（１２）式で定義されるオイラー・ラグランジュ拘束条件を求めると以下の通りになる．

$$\Psi_X(t,s) = \int d\tilde{s}\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}(t,\tilde{s})}{\delta X(t,s)} \approx 0 \quad (12)$$

$$\Psi_\Xi(t,s) = \tilde{Q}(t,s) - a(\partial_s^2)Q(t,s) \approx 0 \quad (13)$$

$$\Psi_Q(t,s) = -\frac{1}{2}\tilde{Q}''(t,s) - a(\partial_s^2)\Xi(t,s) \approx 0 \quad (14)$$

$$\Psi_{\tilde{Q}}(t,s) = -\frac{1}{2}Q''(t,s) + \Xi(t,s) \approx 0 \quad (15)$$

これらの式で用いられている≈は弱いイコールと呼ばれ，ポアソン括弧をとった後に成り立つ等号である．この３式を連立すると，次の式が得られる．

$$\Xi(t,s) \approx 0 \quad (16)$$

$$Q''(t,s) \approx 0 \quad (17)$$

$$\tilde{Q}''(t,s) \approx 0 \quad (18)$$

これから，$Q,\tilde{Q}$は s の一次関数として表せ$\tilde{Q}(t,s) = a_0Q(t.s)$から，$a_0 = 1$とするとき

$$Q(t,s) = \tilde{Q}(t,s) = q_0(t) + q_1(t)s \quad (19)$$

と書けることが分かる．

次に運動量拘束条件

$$\Phi_X(t,s) = P_X(t,s) - \int d\tilde{s}\,\chi(s,-\tilde{s})\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}(t,\tilde{s})}{\delta X(t,s)} \approx 0 \quad (20)$$

を考える．ここで$P_X(t,s)$は場$X(t,s)$に共役な運動量で

$$\chi(s,-\tilde{s}) = \frac{1}{2}\left(sgn(s) + sgn(-\tilde{s})\right) \quad (21)$$

である．恒等式

$$\chi(s,-\tilde{s})\delta^{(n)}(\tilde{s}-s) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\delta^{(k)}(s)\delta^{(n-k-1)}(\tilde{s}) \quad (22)$$

を使い，$\Xi, Q, \tilde{Q}$に共役な運動量$\Pi, P, \tilde{P}$を（２０）式から求めると次のようになる．

$$\Pi(t,s) = q_1(t)\sum_{k=1}^{\infty}a_k\delta^{(2k-2)}(s) + q_0(t)\sum_{k=1}^{\infty}a_k\delta^{(2k-1)}(s) \quad (23)$$

$$P(t,s) = \frac{1}{2}\delta(s)q_1(t) \quad (24)$$

$$\tilde{P}(t,s) = \frac{1}{2}\delta(s)q_1(t) \quad (25)$$

（１＋１）次元ハミルトン形式でのハミルトニアンは以下の式で定義される．

$$H(t) = \int ds\,\Big(\Pi(t,s)\Xi'(t,s) + P(t,s)Q'(t,s) + \tilde{P}(t,s)\tilde{Q}(t,s)\Big) - \hat{\mathcal{L}}(t,0) \quad (26)$$

実際にこれまで求めた量を代入して計算すると

$$H(t) = \frac{1}{2}q_1^2(t) \quad (27)$$

となる．

次に（１＋１）次元ハミルトン形式での正準方程式を考えると，$Q(t,s)$の微分に関して次のことが言える．

$$\dot{Q}(t,s) = \frac{\delta H(t)}{\delta P(t,s)} = Q'(t,s) \quad (28)$$

これから

$$\dot{q}_0(t) + \dot{q}_1(t)s = q_1(t) \quad (29)$$

この式をsの恒等式と見なせば,

$$q_1(t) = \dot{q}_0(t) \equiv \dot{q}(t) \quad (30)$$

$$\dot{q}_1(t) = \ddot{q}(t) = 0 \quad (31)$$

と分かる．

これより，ハミルトニアン（２７）は

$$H(t) = \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) \quad (32)$$

となる．

５．まとめ

非局所場を局所場に置き換え拘束条件を加えた自由場の作用について（１＋１）次元ハミルトン形式化を施し，自由場のハミルトニアンを得られることを示した．次は，相互作用を持つ場について同様の計算を行い，正準形式の構築を目指したい．

６．参考文献

[1] S.Talaganis,T.Biswas,and A.Mazumdar, “Towards understanding the ultraviolet behavior of quantum loops in infinite-derivative theories of gravity”, Classical Quantum Gravity, **32**, 215017 (2015)

[2]E.T.Tomboulis, “Nonlocal and quasilocal field theories”, Phys Rev D **92**, 125637,(2015)

[3]I. Kolar and A. Mazumdar,”Hamiltonian for scalar field model of infinite derivative gravity”, Phys Rev D **101**, 124028 (2020)