P-2

線形回帰数列及びその応用

Fundamental formulae of the linear recurrence sequence and applications

○川口桃花 [1]
*Momoka Kawaguchi [1]

Abstract: We show fundamental formulae on the linear recurrence sequence. Simply applying linear algebra, we deduce general formulae from the recurrence relation. We will adapt the significance of the sequence in number theory.

1. はじめに

本稿においては，線形回帰数列の一般項の導出を行う．特に複素数体上における線形代数を用いる証明を述べる．

2. 線形回帰数列とは

定義 2.1 (線形回帰数列)**.**
$c_k, c_{k-1}, \cdots, c_0 \in \mathbb{C}$ $(c_k \neq 0, c_0 \neq 0)$ とする．$\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ が**線形回帰数列**であるとは，$k \in \mathbb{N}$, 初項 $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して $^\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$c_k a_n + c_{k-1} a_{n+1} + \cdots + c_1 a_{n+k-1} + c_0 a_{n+k} = 0 \quad (1)$$

が成り立つときに言う．この $k \in \mathbb{N}$ のうち最小正の数を線形回帰関係の**次数**，(1) に付随する**特性多項式**を

$$f(x) = c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k \quad (2)$$

と定める [1]．ここでは $c_k \neq 0, c_0 \neq 0$ の場合を考える．

注意 2.2. $c_k \neq 0$ より，$f(x)$ の根はすべて非零である．

3. 線形回帰数列の一般項

本稿では特性多項式が重根を持たない場合に限り，線形回帰数列の一般項の導出を行う．まず特性多項式 (2) を複素数の範囲で一次式に因数分解し，$f(x) = 0$ の根を $r_1, r_2, \cdots, r_k \in \mathbb{C}$ とおく．

定理 3.1.
特性多項式 (2) の根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ が非零で互いに異なるとする．このとき，(2) を特性多項式として持つ線形回帰数列 $\{a_n\}$ に対して，n に依存しない定数 $b_1, \cdots, b_k$ が存在して，$^\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$a_n = b_1 r_1^n + \cdots + b_k r_k^n \quad (3)$$

と表される．但し $b_1, \cdots, b_k$ は，初項 $a_0, \cdots, a_{k-1}$ 及び根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ によって定まる定数である．

注意 3.2. 特性多項式 (2) が重根を持つ場合も同様の式が得られるが，$b_1, \cdots, b_k$ が n の多項式となる [1].

4. 線形代数による一般項の導出

本節においては，線形代数を用いた線形回帰数列の一般項の導出過程を示す．この他にも母関数を用いた証明等が知られる．以下，線形代数の基本的事項をまとめる．

補題 4.1. [2]
A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立.

補題 4.2. [3]
n 次正方行列 A の相異なる非零の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \cdots, \boldsymbol{x}_n$ とおく．
正方行列 P を $P = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \cdots, \boldsymbol{x}_n]$ と定め，かつ $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ とおくと，$P \in GL(n, \mathbb{C})$ であり

$$B = P^{-1} A P$$

と表せる．即ち A は対角化可能である．

証明 (定理 3.1 の証明)**.**
n に依存しない定数 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ が存在し，$^\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して (3) が成り立つことを示したい.

$\mathbf{y}_n = {}^t(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \cdots, a_n)$ とおき，次の行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{c_0} & -\frac{c_2}{c_0} & \cdots & -\frac{c_{k-1}}{c_0} & -\frac{c_k}{c_0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1: 院 (前)・数学

このとき，

$$A\mathbf{y}_{n-1} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{c_0} & -\frac{c_2}{c_0} & \cdots & -\frac{c_{k-1}}{c_0} & -\frac{c_k}{c_0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+k-1} \\ a_{n+k-2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{c_k}{c_0}a_n - \frac{c_{k-1}}{c_0}a_{n+1} - \cdots - \frac{c_1}{c_0}a_{n+k-1} \\ a_{n+k-1} \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{n+k} \\ a_{n+k-1} \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{y}_n$$

となる．行列 A の固有多項式 $\boldsymbol{x}_A(t) = \det(tI - A)$ は

$$\begin{vmatrix} t+\frac{c_1}{c_0} & \frac{c_2}{c_0} & \frac{c_3}{c_0} & \cdots & \frac{c_{k-1}}{c_0} & \frac{c_k}{c_0} \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t \end{vmatrix}$$

である．以下，k 次の行列式に対して

$$\boldsymbol{x}_A(t) = t^k + \frac{c_1}{c_0}t^{k-1} + \frac{c_2}{c_0}t^{k-2} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{c_0}t + \frac{c_k}{c_0}$$

が成り立つことを帰納法で示そう．実際，行列式の最下行で余因子展開すると，

$$\boldsymbol{x}_A(t) = \det(tI - A)$$
$$= (-1)^{2k-1}\cdot(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} t+\frac{c_1}{c_0} & \frac{c_2}{c_0} & \cdots & \frac{c_{k-2}}{c_0} & \frac{c_k}{c_0} \\ -1 & t & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{最下行での余因子展開を繰り返す}}$$
$$+ (-1)^{2k}\cdot t \underbrace{\begin{vmatrix} t+\frac{c_1}{c_0} & \frac{c_2}{c_0} & \cdots & \frac{c_{k-2}}{c_0} & \frac{c_{k-1}}{c_0} \\ -1 & t & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t \end{vmatrix}}_{k-1\ \text{次以下の行列式における成立を仮定した帰納法を用いる}}$$
$$= \frac{c_k}{c_0} + t\left(t^{k-1} + \frac{c_1}{c_0}t^{k-2} + \frac{c_2}{c_0}t^{k-3}\cdots + \frac{c_{k-1}}{c_0}\right)$$
$$= t^k + \frac{c_1}{c_0}t^{k-1} + \frac{c_2}{c_0}t^{k-2} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{c_0}t + \frac{c_k}{c_0}$$

を得る．いま，固有多項式 $\boldsymbol{x}_A$ の根は全て異なると仮定しているので，補題 4.2 より，$P \in GL(n, \mathbb{R})$ が存在して，$A = PDP^{-1}$ と対角化できる．

但し $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_k \end{pmatrix}$ とおく．任意の n に対して，$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ となる．従って，初項ベクトル $\mathbf{y}_0 = {}^t(a_{k-1}, a_{k-2}, \cdots, a_0)$ に対し，

$$\mathbf{y}_n = A\mathbf{y}_{n-1} = \cdots = A^n\mathbf{y}_0 = (PD^nP^{-1})\mathbf{y}_0 \tag{4}$$

が得られる．D は対角行列であるので，D^n も対角要素 $r_1^n, r_2^n, \ldots, r_k^n$ をもつ対角行列である．(4) 式より $\mathbf{y}_n$ は PD^nP^{-1} と初項ベクトル $\mathbf{y}_0$ の積で表せる．P と $\mathbf{y}_0$ は n に依存しないことから，一般項 $a_n\,(n \geq k)$ は $r_1^n, r_2^n, \ldots, r_k^n$ の，n に依存しない定数係数の線形結合で表せる．以下，この係数を $b_1, b_2, \cdots, b_k$ とおき，初項で表そう．$r_1, r_2, \cdots, r_k$ が互いに異なる仮定のもと，これらを並べた VanderMonde の行列式 $\det\left((r_j^{j-1})_{1\leq j\leq k}\right)$ を考えるとこの行列式は 0 でない．定数 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ を

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_k^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix}$$

によって定めると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_k^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix}$$

であり $0 \leq n \leq k-1$ に対しても (3) が成立する．これより全ての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し (3) が成り立つ．以上より定理 3.1 が従う．　□

5. 今後の展望

線形回帰数列の和や積が線形回帰数列となる等の性質を示し，それらを多方面に応用したい．

6. 参考文献

[1] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, *Recurrence Sequences*, Math. Surveys & Monographs, **104**, American Mathematical Society, 2003.

[2] 斎藤正彦，線型代数学入門，東京大学出版会，1966.

[3] 佐武一郎，線型代数学，裳華房，初版 1974, 新装版 2015.